Aufgabe 1

Berechne für die Funktion f die durchschnittliche Änderungsrate auf dem Intervall $I = [a; b]$.

a) $f(x) = 5x^2;\ I = [-2; 8]$

b) $f(x) = -3x^2 + 4;\ I = [-1; 3]$

c) $f(x) = 3x^2 - 2x;\ I = [2; 6]$

d) $f(x) = \frac{2}{x} + x;\ I = [3; 4]$

e) $f(x) = 4\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2;\ I = [0; 9]$

f) $f(x) = 0{,}8^x;\ I = [1; 2]$

g) $f(x) = \sin(x);\ I = [-1; 3]$

h) $f(x) = \sqrt{x} - \cos(x);\ I = [4; 5]$

Aufgabe A2

Berechnen Sie die Änderungsrate von $\boldsymbol{f}$ mit $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1}$ im gegebenen Intervall.

a) $[1; 1{,}5]$

b) $[-4; -2{,}5]$

c) $[2; t]$ mit $t > 2$

d) $[3; 3 + h]$ mit $h > 0$

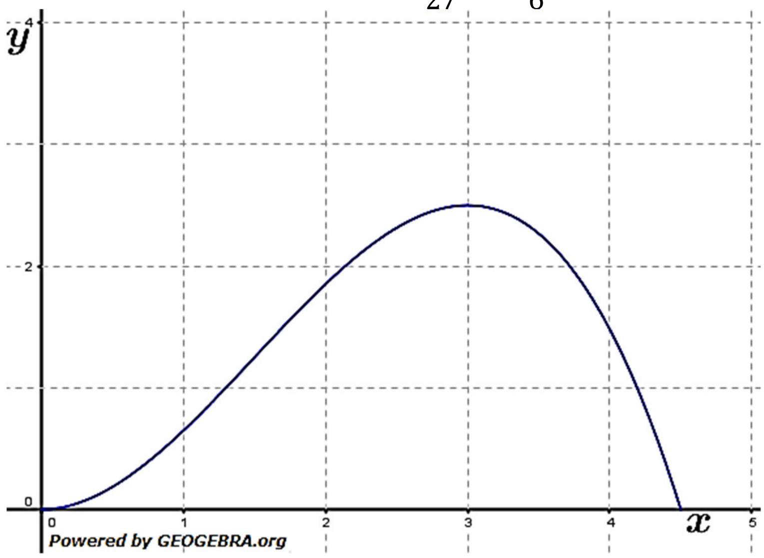
Aufgabe A3

Peter behauptet von sich, ein besonders korrekter Autofahrer zu sein. „Gestern“, so sagt er, „habe ich für die $2{,}5\,km$ lange Ortsdurchfahrt in Heilbronn genau 3 Minuten benötigt.“

War Peter so korrekt, oder aber hat er nur Glück gehabt, dass an manchen Stellen keine Geschwindigkeitskontrolle war?

Die Auswertung des elektronischen Fahrtenbuchs, das die Fahrzeit und die zurückgelegte Strecke speichert, hat festgestellt, dass die Weg-Zeit-Funktion ungefähr durch folgende Funktion f beschrieben werden kann: (x Zeit in Minuten, $f(x)$ Strecke in km).

$$f(x) = -\frac{5}{27}x^3 + \frac{5}{6}x^2$$



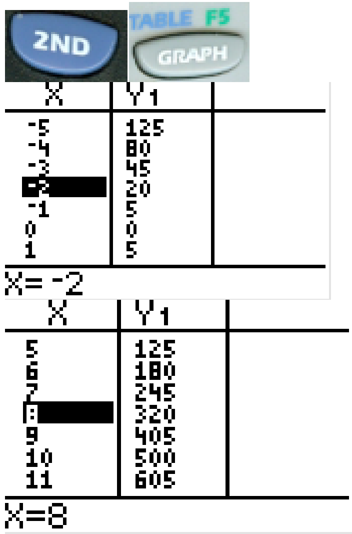
a) Wie kommt Peter zu der Aussage, dass er ein korrekter Autofahrer sei? Gibt es Zeitintervalle, in denen er schneller / langsamer als $50\,km/h$ gefahren ist?

b) Wie müsste der Funktionsgraph aussehen, wenn Peter korrekt gefahren wäre? Gib eine Funktionsgleichung an.

c) Peter hat erfahren, dass nach $1{,}5$ Minuten Fahrzeit die Geschwindigkeit gemessen wurde. Muss er mit einem Bußgeld rechnen?

Lösung A1

Detaillierte Vorgehensweise mit dem GTR für a).
$f(x) = 5x^2;\ I = [-2; 8]$
GTR-Einstellungen:
Y1: $5x^2$



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{320-20}{8-(-2)} = 30$

b) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-23-1}{3-(-1)} = -6$

c) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{96-8}{6-2} = 22$

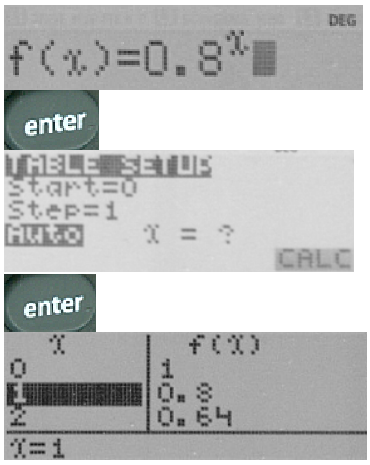
d) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3{,}6667-4{,}5}{4-3} = -0{,}8333$

e) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-28{,}5-0}{9-0} = -3{,}1667$

f) Detaillierte Vorgehensweise mit dem WTR (TI-30X Plus)

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}64-0{,}8}{2-1} = -0{,}16$

2: *Edit function*



g) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}14112-(-0{,}84147)}{3-(-1)} = 0{,}2456$

h) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1{,}9524-2{,}6536}{4-} = -0{,}7012$

Lösung A2

a) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 34$ b) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -92$

c) detaillierte Lösung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{4}t^2-t+1-\left(\frac{1}{4}\cdot 2^2-2+1\right)}{t-2} = \frac{\frac{1}{4}t^2-t+1-1+2-1}{t-2} = \frac{\frac{1}{4}t^2-t+1}{t-2} = \frac{4\cdot\left(\frac{1}{4}t^2-t+1\right)}{4\cdot(t-2)} = \frac{t^2-4t+4}{4\cdot(t-2)}$$
$$= \frac{(t-2)^2}{4(t-2)} = \frac{t-2}{4}$$

d) detaillierte Lösung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{4}(3+h)^2-(3+h)+1-\left(\frac{1}{4}\cdot 3^2-3+1\right)}{3+h-3} = \frac{\frac{1}{4}(9+6h+h^2)-3-h+1-\frac{9}{4}+3-1}{h} = \frac{\frac{9}{4}+\frac{6}{4}h+\frac{1}{4}h^2-h-\frac{9}{4}}{h}$$
$$= \frac{\frac{2}{4}h+\frac{1}{4}h^2}{h} = \frac{h(h+2)}{4h} = \frac{h+2}{4}$$

Lösung A3

a) Peter bildet die Durchschnittsgeschwindigkeit (mittlere Änderungsrate) im Intervall $[0; 3]$ Minuten mit $2{,}5\ km$ lang gefahrener Strecke.

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2{,}5-0}{3-0} = \frac{5}{6} \frac{km}{min} = \frac{50}{60} \frac{km}{min} = 50\ km/h$

Zeitintervalle schnellerer / langsamerer Geschwindigkeiten

Intervall $[0; 1]$ (y-Werte aus Funktionsgleichung errechnet):

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}65-0}{1-0} = \frac{6{,}5}{10} \frac{km}{min} = \frac{39}{60} \frac{km}{min} = 39\ km/h$

Intervall $[1; 2]$ (y-Werte aus Funktionsgleichung errechnet):

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}85-0{,}65}{2-1} = \frac{1{,}2}{1} \frac{km}{min} = \frac{72}{60} \frac{km}{min} = 72\ km/h$

Intervall $[2; 3]$ (y-Werte aus Funktionsgleichung errechnet):

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2{,}5-1{,}85}{3-2} = \frac{0{,}65}{1} \frac{km}{min} = \frac{39}{60} \frac{km}{min} = 39\ km/h$

Ja, es gibt Intervalle schnellerer und langsamerer Geschwindigkeiten.

b) *Funktionsgraph korrekter Fahrweise*

Eine konstante Geschwindigkeit von $50\ km/h$ entspricht dem Weg-Zeit-Gesetz gleichförmiger Bewegungen mit $v = \frac{s}{t}$, umgeformt nach s als Funktionswert ergibt $s = v \cdot t$ bzw. $s(t) = v \cdot s$. Dies ist die Funktionsgleichung einer proportionalen Funktion mit der Steigung v.

Funktionsgleichung für Peter mit $v = 50\ km/h = \frac{5}{6}\ km/min$:

$f(x) = \frac{5}{6} \cdot x$

c) Wir bilden die mittlere Änderungsrate im Intervall $[1{,}4; 1{,}6]$.

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}375-1{,}125}{1{,}6-1{,}4} = \frac{0{,}25}{0{,}2} \frac{km}{min} = \frac{75}{60} \frac{km}{min} = 75\ km/h$

Peter muss mit einer Anzeige einschließlich einem Bußgeld rechnen.