Aufgabenblatt
zu unbestimmten Integralen

© by Fit-in-Mathe-Online.de

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 4

Dokument mit 21 Aufgaben

Aufgabe A1

Bestimme die Stammfunktion F von f, deren Graph durch den Punkt $P(x_p|y_p)$ verläuft.

a) $f(x) = -\frac{1}{4}sin(x) + \frac{4}{\pi^2}x;\quad P\left(\frac{\pi}{2}|-\frac{1}{2}\right)$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x + cos(x);\quad P\left(\frac{\pi}{6}|\frac{\pi^2}{72}\right)$

c) $f(x) = \frac{1}{3}sin(x) + \frac{4}{3};\quad P\left(\frac{\pi}{3}|\frac{4\pi}{9}\right)$

d) $f(x) = x^2 + sin(x);\quad P\left(\pi|\frac{4\pi^3}{3}\right)$

e) $f(x) = -2\,sin(x) + \sqrt{2}cos\,(x);\quad P\left(\frac{\pi}{4}|\sqrt{2}+6\right)$

f) $f(x) = -sin(x) + x;\quad P\left(\frac{\pi}{3}|0{,}5\right)$

g) $f(x) = 5\,cos(x) + 3x;\quad P\left(\frac{\pi}{3}|0{,}5\right)$

h) $f(x) = \sqrt{3}\,sin(x) - cos\,(x);\quad P\left(\frac{\pi}{6}|2\right)$

Aufgabe A2

F sei eine Stammfunktion von f mit $f(x) = sin\,(x)$ im Intervall $[0;2\pi]$. F verläuft durch den Punkt $P(0|-2)$. In welchen Punkten hat F dieselbe Steigung wie

a) die erste Winkelhalbierende;

b) die x-Achse;

c) die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$?

Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2cos\,(x)$ für $x \in [0;2\pi]$. Eine Stammfunktion F von f geht durch den Punkt $P(0|-2)$.

a) An welchen Stellen x_0 gilt $F(x_0) = -1$?

b) Gibt es Stellen mit $F(x_0) > 1$?

Aufgabe A4

Bilde jeweils eine Stammfunktion F von f sowie eine weitere Stammfunktion F^* von F.

a) $f(x) = 2\,cos(x) - 1$

b) $f(x) = 2sin\,(3x)$

c) $f(x) = x - sin\,(0{,}3\pi x)$

d) $f(x) = 4\,sin(3 + 2x) + 1$

e) $f(x) = \pi - 2cos\,(2(x+1))$

f) $f(x) = 4\,cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$

g) $f(x) = -3sin\,(2x^2 - 1)$

h) $f(x) = 4\,sin^2(5x - 3)$

Lösung A1

a) $f(x)=-\frac{1}{4}sin(x)+\frac{4}{\pi^2}x;\quad P\left(\frac{\pi}{2}|-\frac{1}{2}\right)$

$F(x)=\frac{1}{4}cos(x)+\frac{2}{\pi^2}\cdot x^2+C$

$-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{4}+C$

$-1=\frac{1}{2}+C$

$-1=C$

$F(x)=\frac{1}{4}cos(x)+\frac{2}{\pi^2}\cdot x^2-1$

b) $f(x)=\frac{1}{2}x+cos(x);\quad P\left(\frac{\pi}{6}|\frac{\pi^2}{72}\right)$

$F(x)=\frac{1}{4}x^2+sin(x)+C$

$\frac{\pi^2}{72}=\frac{\pi^2}{144}+0{,}5+C$

$\frac{\pi^2}{144}-0{,}5=C$

$C=-0{,}43$

$F(x)=\frac{1}{4}x^2+sin(x)-0{,}43$

c) $f(x)=\frac{1}{3}sin(x)+\frac{4}{3};\quad P\left(\frac{\pi}{3}|\frac{4\pi}{9}\right)$

$F(x)=-\frac{1}{3}\cos(x)+\frac{4}{3}x+C$

$\frac{4\pi}{9}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4\pi}{9}+C$

$\frac{1}{6}=C$

$F(x)=-\frac{1}{3}\cos(x)+\frac{4}{3}x+\frac{1}{6}$

d) $f(x)=x^2+sin(x);\quad P\left(\pi|\frac{4\pi^3}{3}\right)$

$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\cos(x)+C$

$\frac{4\pi^3}{3}=\frac{1}{3}\cdot\pi^3-(-1)+C$

$\pi^3-1=C$

$C=30$

$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\cos(x)+30$

e) $f(x)=-2\,sin(x)+\sqrt{2}cos\,(x);\quad P\left(\frac{\pi}{4}|\sqrt{2}+6\right)$

$F(x)=2\cos(x)+\sqrt{2}\sin\,(x)+C$

$\sqrt{2}+6=\sqrt{2}+1+C$

$5=C$

$F(x)=2\cos(x)+\sqrt{2}\sin\,(x)+5$

f) $f(x)=-\,sin(x)+x;\quad P\left(\frac{\pi}{3}|0{,}5\right)$

$F(x)=\cos(x)+\frac{1}{2}x^2+C$

$0{,}5=0{,}5+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{9}+C$

$-\frac{\pi^2}{18}=C$

$F(x)=\cos(x)+\frac{1}{2}x^2-\frac{\pi^2}{18}$

g) $f(x)=5\,cos(x)+3x;\quad P\left(\frac{\pi}{3}|0{,}5\right)$

$F(x)=5\sin(x)+\frac{3}{2}x^2+C$

$0{,}5=5\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}+\frac{\pi^2}{6}+C$

$0{,}5-\frac{5}{2}\sqrt{3}-\frac{\pi^2}{6}=C$

$-5{,}48=C$

$F(x)=5\sin(x)+\frac{3}{2}x^2-5{,}48$

h) $f(x)=\sqrt{3}\,sin(x)-cos\,(x);\quad P\left(\frac{\pi}{6}|2\right)$

$F(x)=-\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)+C$

$2=-\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}-0{,}5+C$

$2=-2+C$

$4=C$

$F(x)=-\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)+4$

Lösung A2

$F(x)=-\cos(x)+C$

$-2=-\cos(0)+C$

$-2=-1+C$

$-1=C$

$F(x)=-\cos(x)-1$

a) Dieselbe Steigung wir die 1. Winkelhalbierende:

$f(x)=1$ ➔ $x_1=\frac{\pi}{2}$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0-1$

Im Punkt $Q\left(\frac{\pi}{2}\middle|-1\right)$

b) Dieselbe Steigung wir die x-Achse:

$f(x) = 0$ ➔ $x = 0; \pi; 2\pi$

$F(0) = -1 - 1 = -2$ ➔ $Q(0|-2)$

$F(\pi) = 1 - 1 = 0$ ➔ $R(\pi|0)$

$F(2\pi) = -1 - 1 = -2$ ➔ $R(2\pi|-2)$

c) Dieselbe Steigung wie die Gerade mit $y = \frac{1}{2}x$:

$f(x) = \frac{1}{2}$ ➔ $x_1 = \frac{\pi}{6}$; $x_2 = \frac{5}{6}\pi$

$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1$; $F\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1$

In den Punkten $Q\left(\frac{\pi}{6}\middle|-\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\right)$ und . $R\left(\frac{5}{6}\pi\middle|\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\right)$

Lösung A3

$F(x) = 2sin(x) + C$

$-2 = 2\sin(0) + C$

$C = -2$

$F(x) = 2sin(x) - 2$

a) $-1 = 2sin(x) - 2$

$1 = 2sin(x)$

$sin(x) = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{6}$; $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

$\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi\}$

b) $1 > 2sin(x) - 2$

$3 > 2sin(x)$ ➔ $\frac{3}{2} > \sin(x)$

Wegen $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ gibt es keine Stellen mit $F(x_0) > 1$.

Lösung A4

a) $f(x) = 2\cos(x) - 1$

$F(x) = 2\sin(x) - x$ $\quad F^*(x) = -2\cos(x) - \frac{1}{2}x^2$

b) $f(x) = 2sin(3x)$

$F(x) = -\frac{2}{3}\cos(3x)$ $\quad F^*(x) = -\frac{2}{9}\sin(3x)$

c) $f(x) = x - sin(0{,}3\pi x)$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{10}{3}\cos(0{,}3x)$ $\quad F^*(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{100}{9}\sin(0{,}3x)$

d) $f(x) = 4\,sin(3 + 2x) + 1$

$F(x) = -2\cos(3 + 2x) + \frac{1}{2}x^2$ $\quad F^*(x) = -\sin(3 + 2x) + \frac{1}{6}x^3$

e) $f(x) = \pi - 2cos(2(x + 1))$

$F(x) = \pi x - \sin(2(x + 1))$ $\quad F^*(x) = \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{1}{2}\cos(2(x + 1))$

f) $f(x) = 4\cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$

$F(x) = 4\pi\sin\left(\frac{x}{\pi}\right)$ $\quad F^*(x) = -4\pi^2\cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$

g) $f(x) = -3sin(2x - 1)$

$F(x) = \frac{3}{2}\cos(2x - 1)$ $\quad F^*(x) = \frac{3}{4}\sin(2x - 1)$

h) $f(x) = 4\,sin(5x - 3)$

$F(x) = -\frac{4}{5}\cos(5x - 3)$ $\quad F^*(x) = -\frac{4}{25}\sin(5x - 3)$