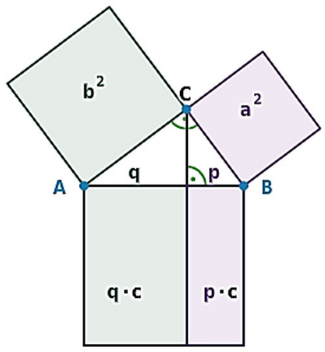
Lösung A1

Der Kathetensatz des Euklid lautet:
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit rechtem Winkel im Punkt C und Hypotenusenabschnitten p und q gilt:
$a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$.



Dividiert man die Gleichungen des Kathetensatzes einmal durch die jeweilige Kathete und anschließend durch den entsprechenden Hypo-tenusenabschnitt, erhält man eine Verhältnisgleichung wie folgt:

$a^2 = p \cdot c \qquad | \quad :p$

$c = \frac{a^2}{p}$

$b^2 = q \cdot c \qquad | \quad :q$

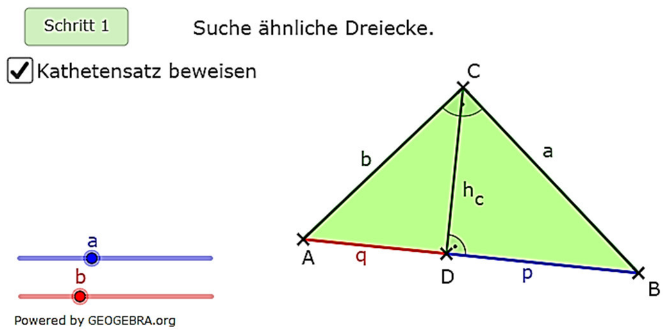
$c = \frac{b^2}{q}$

somit gilt:

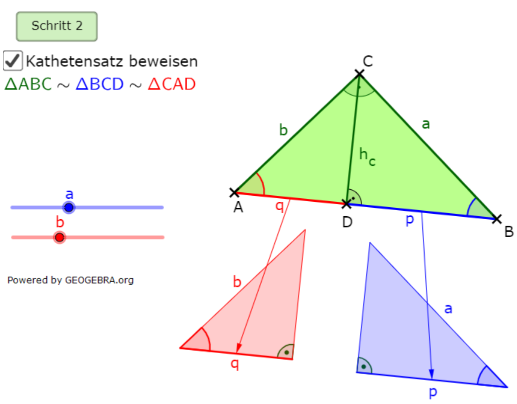
$\frac{a^2}{p} = \frac{b^2}{q}$

Da ähnlichen Figuren streckenverhältnistreu sind, zwängt sich ein Beweis des Kathetensatzes über Ähnlichkeit geradezu auf. Im nachfolgenden führen wir den Beweis in 5 Schritten durch.

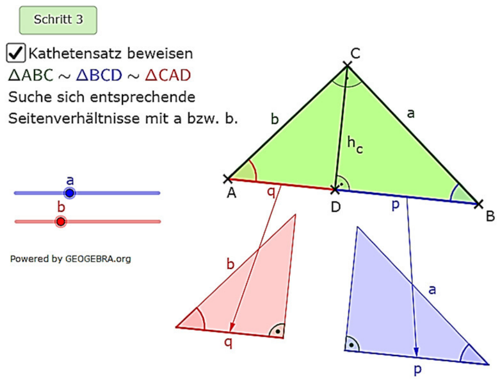
Wir suchen im 1. Schritt ähnliche Dreiecke.



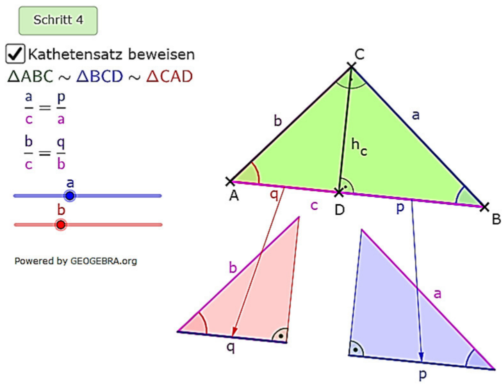
Im 2. Schritt stellen wir fest, dass die Dreiecke ΔABC, ΔBCD sowie ΔCAD ähnlich sind, denn alle drei Dreiecke haben einen rechten Winkel sowie identisch große Basiswinkel an den jeweiligen Hypotenusen.



Im 3. Schritt suchen wir sich entsprechende Seitenverhältnisse mit den Seiten a bzw. b.



Wir stellen die Ähnlichkeiten von ΔABC und ΔBCD fest mit $\frac{a}{c} = \frac{p}{a}$ sowie für ΔABC und ΔCAD mit $\frac{b}{c} = \frac{q}{b}$.



Durch Gleichungsumstellung der Ähnlichkeitsverhältnisse aus Schritt 4 erhalten wir letztendlich den Beweis des Kathetensatzes, nämlich:

$\frac{a}{c} = \frac{p}{a} \qquad | \quad \cdot a$

$\frac{a^2}{c} = p \qquad | \quad \cdot c$

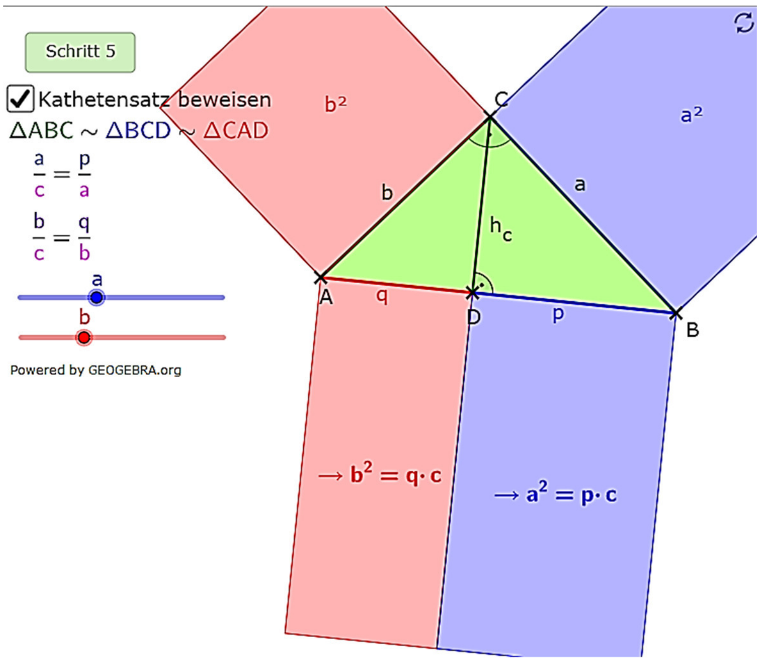
$a^2 = p \cdot c$

sowie

$\frac{b}{c} = \frac{q}{b} \qquad | \quad \cdot b$

$\frac{b^2}{c} = q \qquad | \quad \cdot c$

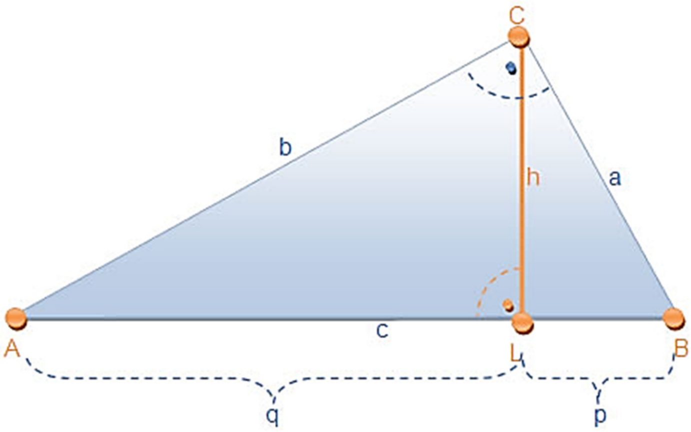
$b^2 = q \cdot c$



Ähnlichkeitsbeweis zum Kathetensatz des Euklid

Eine mögliche zweite Beweisart führt uns zum Satz des Pythagoras und dem Höhensatz des Euklid.

Im neben abgebildeten rechtwinkligen Dreieck gilt:



$b^2 = q^2 + h^2$ Satz des Pythagoras
$h^2 = p \cdot q$ Höhensatz des Euklid
$b^2 = q^2 + p \cdot q$
$b^2 = q(q + p)$ (q ausgeklammert)
Wegen $q + p = c$ gilt damit
$b^2 = q \cdot c$

Identische Vorgehensweise für
$a^2 = p^2 + h^2$ Satz des Pythagoras
$h^2 = p \cdot q$ Höhensatz des Euklid
$a^2 = p^2 + p \cdot q$
$a^2 = p(p + q)$ (p ausgeklammert)
Wegen $p + q = c$ gilt damit
$a^2 = p \cdot c$