

In diesem Arbeitsblatt befinden sich Aufgaben mit **zwei** Logarithmustermen.



Aufgabe A1

Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der folgenden logarithmischen Gleichungen.

- a) $\log_2(x) + \log_2(5) = 1 + \log_2(1 + x^2)$
- b) $\log_3(2x - 5) - \log_3(x - 1) = 3$
- c) $\log(x) - \log(5) = 1 + \log(2) - \log(4x)$
- d) $\log_2(3x - 37) - \log_2(2x - 8) = 2$
- e) $\log_2(x + 16) = \log_2(x - 8) + 2$
- f) $\log_2(3x - 4) - 2 = \log_2(2x - 16)$
- g) $\log(x) + \log(3) = \log(1 + x)$
- h) $\log_4(x - 4) + \log_4(2x + 8) = 4$
- i) $\log(x) + \log(x + 3) = 1$
- j) $\log_3(x + 3) + \log_3(6) = 2 + \log_3(x - 4)$

Aufgabe A2

Ermittle die Definitions- und Lösungsmenge der folgenden logarithmischen Gleichungen.

- a) $3 \cdot \log_3(x) - 3 = 4 \cdot \log_3(x)$
- b) $2 \cdot \log_8(x) = 4 \cdot \log_8(x) + 1$
- c) $\log_2(2x + 6) - \log_2(x - 2) = 2$
- d) $\log_7(x + 4) = 1 + \log_7(x - 2)$
- e) $\log_2(x - 1) + \log_2(x) = 1 + \log_2(3x - 5)$
- f) $\log_3(5x - 2) + \log_3(x - 1) - \log_3(-2x) = 2$
- g) $\log_a(x^3) + \log_a(x^2) - \log_a(x) = 0; (a > 0; a \neq 1)$
- h) $\frac{1}{3} : \log_2(x) + 3 \cdot \log_2(\sqrt{x}) = \log_2(x^2) + 0,5$

Lösung A1

a) $\log_2(x) + \log_2(5) = 1 + \log_2(1 + x^2)$

Definitionsbereich:

$$x > 0 \wedge 1 + x^2 > 0 \rightarrow \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\log_2(x) - \log_2(1 + x^2) = 1 - \log_2(5)$$

$$\log_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = \log_2\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{2}{5}$$

$$5x = 2 + 2x^2$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$x_1 = 2 \in \mathbb{D}; \quad x_2 = \frac{1}{2} \in \mathbb{D}$$

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$$

Zusammenführen

Logarithmusgesetze anwenden

Entlogarithmieren

: 2

p/q-Formel

b) $\log_3(2x - 5) - \log_3(x - 1) = 3$

Definitionsbereich:

$$2x - 5 > 0 \rightarrow x > \frac{5}{2}$$

$$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$\mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{2}\right\}$$

$$\log_3\left(\frac{2x-5}{x-1}\right) = 3$$

$$\frac{2x-5}{x-1} = 3^3$$

$$2x - 5 = 27x - 27$$

$$25x = 22$$

$$x = \frac{22}{25} \notin \mathbb{D}$$

$$\mathbb{L} = \{\}$$

Logarithmusgesetze anwenden

Entlogarithmieren

c) $\log(x) - \log(5) = 1 + \log(2) - \log(4x)$

Definitionsbereich

$$x > 0 \rightarrow \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\log(x) + \log(4x) = \log(10 \cdot 2) + \log(5)$$

$$\log(4x^2) = \log(100)$$

$$4x^2 = 100$$

$$x^2 = 25$$

$$x_1 = 5 \in \mathbb{D}; \quad x_2 = -5 \notin \mathbb{D}$$

$$\mathbb{L} = \{5\}$$

Zusammenführen

Logarithmusgesetze anwenden

Entlogarithmieren

d) $\log_2(3x - 37) - \log_2(2x - 8) = 2$

Definitionsbereich

$$3x - 37 > 0 \rightarrow x > \frac{37}{3}$$

$$2x - 8 > 0 \rightarrow x > 4$$

$$\mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{37}{3}\right\}$$

$$\log_2\left(\frac{3x-37}{2x-8}\right) = 2$$

$$\frac{3x-37}{2x-8} = 2^2$$

$$3x - 37 = 8x - 32$$

$$5x = -5$$

$$x = -1 \notin \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{L} = \{\}$$

Logarithmusgesetze anwenden

Entlogarithmieren

e) $\log_2(x + 16) = \log_2(x - 8) + 2$

Definitionsbereich

$$x + 16 > 0 \rightarrow x > -16$$

$$x - 8 > 0 \rightarrow x > 8$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 8\}$$

$$\log_2(x + 16) - \log_2(x - 8) = 2$$

$$\log_2\left(\frac{x+16}{x-8}\right) = 2$$

$$\frac{x+16}{x-8} = 2^2$$

$$x + 16 = 4x - 32$$

$$3x = 48$$

$$x = 16 \in \mathbb{D}$$

$$\mathbb{L} = \{16\}$$

- | Zusammenführen
- | Logarithmusgesetze anwenden
- | Entlogarithmieren

f) $\log_2(3x - 4) - 2 = \log_2(2x - 16)$

Definitionsbereich

$$3x - 4 > 0 \rightarrow x > \frac{4}{3}$$

$$2x - 16 > 0 \rightarrow x > 8$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 8\}$$

$$\log_2(3x - 4) - \log_2(2x - 16) = 2$$

$$\log_2\left(\frac{3x-4}{2x-16}\right) = 2$$

$$\frac{3x-4}{2x-16} = 2^2$$

$$3x - 4 = 8x - 64$$

$$5x = 60$$

$$x = 12 \in \mathbb{D}$$

$$\mathbb{L} = \{12\}$$

- | Zusammenführen
- | Logarithmusgesetze anwenden
- | Entlogarithmieren

g) $\log(x) + \log(3) = \log(1 + x)$

Definitionsbereich

$$x > 0$$

$$1 + x > 0 \rightarrow x > -1$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\log(3x) = \log(1 + x)$$

$$3x = 1 + x$$

$$2x = 1$$

$$x = 0,5 \in \mathbb{D}$$

$$\mathbb{L} = \{0,5\}$$

- | Logarithmusgesetze anwenden
- | Numerus-Vergleich

h) $\log_4(x - 4) + \log_4(2x + 8) = 4$

Definitionsbereich

$$x - 4 > 0 \rightarrow x > 4$$

$$2x + 8 > 0 \rightarrow x > -4$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$$

$$\log_4((x - 4)(2x + 8)) = 4$$

$$(x - 4)(2x + 8) = 4^4$$

$$2x^2 - 32 = 256$$

$$2x^2 = 288$$

$$x^2 = 144$$

$$x_1 = 12 \in \mathbb{D}; \quad x_2 = -12 \notin \mathbb{D}$$

$$\mathbb{L} = \{12\}$$

- | Logarithmusgesetze anwenden
- | Entlogarithmieren

i) $\log(x) + \log(x+3) = 1$

Definitionsbereich

$$x > 0$$

$$x+3 > 0 \rightarrow x > -3$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\log(x \cdot (x+3)) = 1$$

$$x^2 + 3x = 10$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$$x_1 = 2 \in \mathbb{D}; \quad x_2 = -5 \notin \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{L} = \{2\}$$

| Logarithmusgesetze anwenden
| Entlogarithmieren

j) $\log_3(x+3) + \log_3(6) = 2 + \log_3(x-4)$

Definitionsbereich

$$x+3 > 0 \rightarrow x > -3$$

$$x-4 > 0 \rightarrow x > 4$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$$

$$\log_3(x+3) + \log_3(6) - \log_3(x-4) = 2$$

$$\log_3\left(6 \cdot \frac{x+3}{x-4}\right) = 2$$

$$\frac{6x+18}{x-4} = 3^2$$

$$6x+18 = 9x-36$$

$$3x = 54$$

$$x = 18 \in \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{L} = \{18\}$$

| Zusammenführen
| Logarithmusgesetze anwenden
| Entlogarithmieren

Lösung A2

a) $3 \cdot \log_3(x) - 3 = 4 \cdot \log_3(x)$

Definitionsbereich $x > 0$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$3 \cdot \log_3(x) - 3 = 4 \cdot \log_3(x)$$

$$-3 = \log_3(x)$$

$$x = 3^{-3}$$

$$x = \frac{1}{27} \in \mathbb{D}$$

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{27}\right\}$$

| $-3 \cdot \log_3(x)$
| Entlogarithmieren

b) $2 \cdot \log_8(x) = 4 \cdot \log_8(x) + 1$

Definitionsbereich

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$2 \cdot \log_8(x) = 4 \cdot \log_8(x) + 1$$

$$0 = 2 \cdot \log_8(x) + 1$$

$$2 \cdot \log_8(x) = -1$$

$$\log_8(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = 8^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{8}} \in \mathbb{D}$$

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{\sqrt{8}}\right\}$$

| $-2 \cdot \log_8(x)$
| -1
| $:2$
| Entlogarithmieren

c) $\log_2(2x + 6) - \log_2(x - 2) = 2$

Definitionsbereich

$$2x + 6 > 0 \rightarrow x > -3$$

$$x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$$

$$\log_2\left(\frac{2x+6}{x-2}\right) = 2$$

$$\frac{2x+6}{x-2} = 2^2$$

$$2x + 6 = 4x - 8$$

$$2x = 14$$

$$x = 7 \in \mathbb{D}$$

$$\mathbb{L} = \{7\}$$

| Logarithmengesetze anwenden

| Entlogarithmieren

d) $\log_7(x + 4) = 1 + \log_7(x - 2)$

Definitionsbereich

$$x + 4 > 0 \rightarrow x > -4$$

$$x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$$

$$\log_7(x + 4) = \log_7(7) + \log_7(x - 2)$$

$$\log_7(x + 4) = \log_7(7(x - 2))$$

$$x + 4 = 7x - 14$$

$$6x = 18$$

$$x = 3 \in \mathbb{D}$$

$$\mathbb{L} = \{3\}$$

| Logarithmengesetze anwenden

| Entlogarithmieren

| Numerivergleich

e) $\log_2(x - 1) + \log_2(x) = 1 + \log_2(3x - 5)$

Definitionsbereich

$$x - 1 > 0$$

$$x > 1$$

$$3x - 5 > 0 \rightarrow x > \frac{5}{3}$$

$$\mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{3}\right\}$$

$$\log_2(x(x - 1)) = \log_2(2) + \log_2(3x - 5)$$

$$\log_2(x(x - 1)) = \log_2(2(3x - 5))$$

$$x^2 - x = 6x - 10$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x_{1,2} = 3,5 \pm \sqrt{12,25 - 10} = 3,5 \pm \sqrt{2,25} = 3,5 \pm 1,5$$

$$x_1 = 5 \in \mathbb{D}; x_2 = 2 \in \mathbb{D}$$

$$\mathbb{L} = \{2; 5\}$$

| Logarithmengesetze anwenden

| Entlogarithmieren

| Numerivergleich

f) $\log_3(5x - 2) + \log_3(x - 1) - \log_3(-2x) = 2$

Definitionsbereich

$$5x - 2 > 0 \rightarrow x > \frac{2}{5}$$

$$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$-2x > 0 \rightarrow x < 0$$

Da x nicht gleichzeitig $> \frac{2}{5}$ und < 0 sein kann gibt es weder einen gültigen Definitionsbereich noch eine Lösung.

$$\mathbb{D} = \{\} \text{ und } \mathbb{L} = \{\}.$$

g) $\log_a(x^3) + \log_a(x^2) - \log_a(x) = 0$

Definitionsbereich

$$x^3 > 0 \wedge x^2 > 0 \wedge x > 0$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\log_a\left(\frac{x^3 \cdot x^2}{x}\right) = 0$$

| Logarithmengesetze anwenden

$$\log_a(x^4) = 0$$

$$x^4 = 1$$

| Entlogarithmieren

$$x_1 = 1 \in \mathbb{D}; \quad x_2 = -1 \notin \mathbb{D}$$

$$\mathbb{L} = \{1\}$$

h) $\frac{1}{3} \cdot \log_2(x) + 3 \cdot \log_2(\sqrt{x}) = \log_2(x^2) + 0,5$

Definitionsbereich

$$x > 0 \wedge \sqrt{x} > 0 \wedge x^2 > 0$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\frac{1}{3 \cdot \log_2(x)} + \frac{3}{2} \cdot \log_2(x) = 2 \log_2(x) + 0,5$$

| Logarithmengesetze anwenden

Substitution:

$$\log_2(x) = u$$

$$\frac{1}{3 \cdot u} + \frac{3}{2} \cdot u - 2u = 0,5$$

| $\cdot 3 \cdot u$

$$1 + \frac{9}{2}u^2 - 6u^2 = 1,5u$$

$$-\frac{3}{2}u^2 - 1,5u + 1 = 0$$

| $\cdot -\frac{2}{3}$

$$u^2 + u - \frac{2}{3} = 0$$

$$u_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{3}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{11}{12}}$$

$$u_1 = 0,4574; \quad u_2 = -1,4574$$

Resubstitution:

$$\log_2(x_1) = u_1 = 0,4574$$

$$x_1 = 2^{0,4574} = 1,37 \in \mathbb{D}$$

$$x_2 = 2^{-1,4574} = 0,36 \in \mathbb{D}$$

$$\mathbb{L} = \{0,36; 1,37\}$$