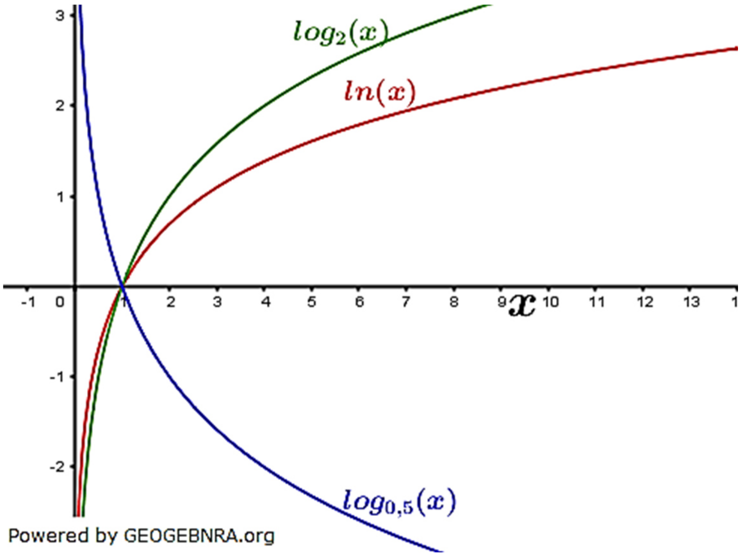
Einleitung

Als **Logarithmus** (Plural: *Logarithmen;* von altgriechisch λόγος *lógos*, „Verständnis, Lehre, Verhältnis", und ἀριθμός, *arithmós,* „Zahl") einer Zahl bezeichnet man den Exponenten, mit dem eine vorher festgelegte Zahl, die *Basis,* potenziert werden muss, um die gegebene Zahl, den *Numerus*, zu erhalten.

Logarithmen sind nur für positive reelle Zahlen definiert, auch die Basis muss positiv sein.

Der Logarithmus einer positiven reellen Zahl x zur Basis b ist also der Wert des Exponenten, wenn x als Potenz zur Basis b dargestellt wird, also diejenige Zahl y, welche die Gleichung $b^y = x$ löst. Man schreibt $y = log_b(x)$.

Das *Logarithmieren,* d. h. der Übergang von x zu $log_b(x)$, ist damit eine Umkehroperation des Potenzierens. Die Funktion, die bei gegebener fester Basis b jeder positiven Zahl ihren Logarithmus zuordnet, nennt man *Logarithmusfunktion* zur Basis b.

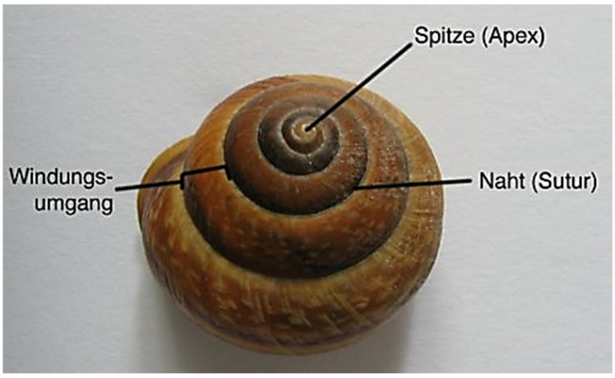


Graphen unterschiedlicher Logarithmusfunktionen

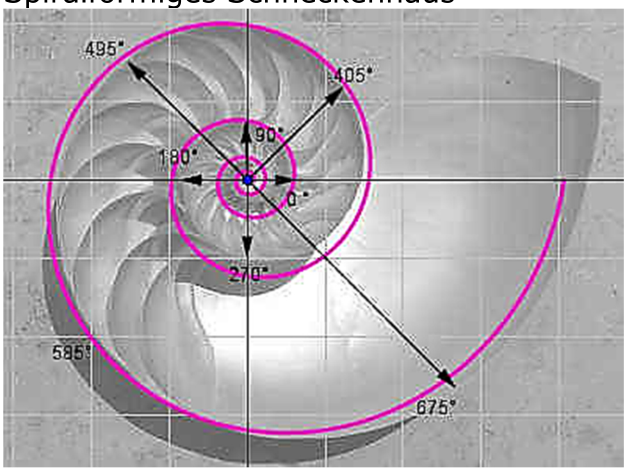
Mit Logarithmen lassen sich sehr stark wachsende Zahlenreihen übersichtlich darstellen, da der Logarithmus für große Zahlen viel langsamer steigt als die Zahlen selbst. Wie die Gleichung

$$log_b(x \cdot y) = log_b(x) + log_b(y)$$

zeigt, kann man durch Logarithmieren eine Multiplikation durch die viel weniger rechenintensive Addition ersetzen. Auch beschreiben Logarithmen auf mathematisch elegante Weise viele technische Prozesse sowie Phänomene der Natur wie etwa das Verhalten einer Halbleiter-Diode, die *Spirale eines Schneckenhauses* (siehe Grafiken rechts) oder die Wahrnehmung unterschiedlicher Lautstärken durch das menschliche Ohr.



Spiralförmiges Schneckenhaus



Graph einer logarithmischen Spiralrelation

Potenz, Wurzel, Logarithmus

Es gibt einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen Potenzen und Wurzeln sowie zwischen Potenzen und Logarithmen.
Beide Rechenarten – Wurzeln und Logarithmen – sind Umkehrrechenarten des potenzierens. Doch wo ist der Unterschied?

Potenz und Wurzel

Diesen Zusammenhang haben wir im Kapitel „Wurzeln" bereits ausführlich behandelt. Wir wissen, dass für $x^2 = 16$ $x_{12} = \pm\sqrt{16}$, somit die beiden Werte $x_1 = 4$ sowie $x_2 = -4$ Lösungen der Gleichung sind. Oder bei $x^2 = a^2b^2$ $x_{12} = \pm\sqrt{a^2b^2}$ sind $x_1 = ab$ und $x_2 = -ab$ Lösungen. Wir müssen bei der Potenz x^2 die Wurzel ziehen, um zu wissen wie große denn x ist.

Potenz und Logarithmus

Bislang haben wir nur Potenzen kennengelernt, bei denen die Variable x die Basis der Potenz dartstellte und der Exponent eine Zahl aus der Menge der rationalen Zahlen war.
Nun kann es aber doch auich umgekehrt sein, die Basis einer Potenz ist eine Zahl aus der Menge der rationalen Zahlen und der Exponent ist die Variable x.
Beispiel:

$2^x = 16$

Wir wollen jetzt wissen, wie groß muss denn der Exponent x sein, damit $2^x = 16$ ergibt, also wie oft müssen wir die Zahl 2 mit sich selbst multipizieren, damit 16 herauskommt.

Nun, bei diesem Beispiel ist es noch einfach, denn wir erkennen sofort, das $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ ist, also muss $x = 4$ sein.

Somit haben wir es hier zwar auch mit einer Umkehrrechenart des Potenzierens zu tun, die Vorgehensweise ist aber eine ganz andere, denn bei $2^x = 16$ könnten wir zwar gemäß den Regeln zur Äquvalenzumformung schreiben:

$$\sqrt[x]{2^x} = \sqrt[x]{16} \;\rightarrow\; 2 = \sqrt[x]{16}$$

Aber welche Wurzel sollen wir denn jetzt ziehen? Was ist denn die x-te Wurzel?

Ist die **Basis** einer Potenz eine *Zahl der rationalen Zahlenmenge* und der **Exponent** die *Variable / Unbekannte*, so müssen wir die **Logarithmusrechnung** zur Lösung einer solchen Gleichung anwenden.

Die einzelnen Kapitel des Logarithmus

Machen wir uns einen Überblick über die behandelten einzelnen Kapitel im Portal.

Der Logarithmus einer Zahl

Unter dem Logarithmus verstehen wir eine Zahl, mit der man die Basis des Logarithmus potenzieren muss, um die Zahl zu erhalten. Wir schreiben

$$log_a(b) = x$$

In dieser Schreibweise ist a *die Basis* der Potenz, b die zu *erhaltende Zahl* und x die gesuchte *Potenz zur Basis* a.

Beispiele:

$log_2(16) = x$: x ist die Zahl, mit der man die 2 potenzieren muss, um 16 zu erhalten.

$log_3(243) = x$: x ist die Zahl, mit der man die 3 potenzieren muss, um 243 zu erhalten.

$log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right) = x$: x ist die Zahl, mit der man die $\frac{1}{2}$ potenzieren muss, um $\frac{1}{8}$ zu erhalten.

Die Logarithmengesetze

Wir betrachten hier lediglich die Form der einzelnen Logarithmengesetze. Vertiefende Bettrachtungen und Übungsaufgaben findest du im diesbezüglichen Kapitel.

Logarithmus eines Produkts

Für den Logarithmus eines Produkts gilt:

$$log_a(u \cdot v) = log_a(u) + log_a(v)$$

Umgekehrt gilt somit

$$log_a(u) + log_a(v) = log_a(u \cdot v)$$

Logarithmus eines Quotienten

Für den Logarithmus eines Quotienten gilt:

$$log_a\left(\frac{u}{v}\right) = log_a(u) - log_a(v)$$

Umgekehrt gilt somit

$$log_a(u) - log_a(v) = log_a\left(\frac{u}{v}\right)$$

Logarithmus einer Potenz

Für den Logarithmus einer Potenz gilt:

$$log_a(u^r) = r \cdot log_a(u)$$

Umgekehrt gilt somit

$$r \cdot log_a(u) = log_a(u^r)$$

Logarithmus Sonderregeln

Es existieren drei besondere Regeln, die du auswendig lernen solltest.

1. Sonderregel

$$log_a(a) = 1$$

Jeder Logarithmus von seiner Basis ist immer 1.

2. Sonderregel

$$log_a(1) = 0$$

Jeder Logarithmus von 1 ist stets 0.

3. Sonderregel

$$a^{log_a(b)} = b$$

Logarithmen als Potenz ihrer Basis heben sich auf.

Berechnungen mit Logarithmen

Der Logarithmus einer Zahl kann nicht nur durch „Probieren" gefunden werden, sondern konkret auch durch Berechnungen. Da die meisten Logarithmuszahlen jedoch irrationale Zahlen sind, ist die Verwendung eines Taschenrechners unumgänglich. In Zeiten, in denen es noch keine elektronischen Taschenrechner gab, halfen umfangreiche Tabellen.

Da jedoch jede rationale, positive Zahl außer der 1 die Basis eines Logarithmus sein kann, gibt es unendlich viele Logarithmensysteme.

In der Praxis haben sich zwei Systeme durchgesetzt, nämlich das des dekadischen Logarithmus, also des Logarithmus zur Basis 10 und der natürliche Logarithmus, der Logarithmus zur Basis e, der Eulerschen Zahl. Diese beiden Logarithmensysteme haben auch eine eigene Schreibweise.

Ist der dekadische Logarithmus – ausgeschrieben als $log_{10}(b)$ – gemeint, wird vereinfacht nur $log\,(b)$ bzw. $lg\,(b)$ geschrieben. Auf den heutigen elektronischen Taschenrechnern jeglicher Art finden wir eine mit log beschriftete Taste. Diese Taste berechnet den Logarithmus zur Basis 10.

Ist der natürliche Logarithmus - $log_e(b)$ – gemeint, wird nur $ln\,(b)$ geschrieben (Die Abkürzung steht für logarithmus naturalis). Auf den heutigen elektronischen Taschenrechnern jeglicher Art finden wir eine mit ln beschriftete Taste. Diese Taste berechnet den Logarithmus zur Basis e.

Logarithmische Gleichungen

Mit der Beziehung $log_a(b) = c$ lassen sich drei unterschiedliche Arten von Bestimmungsgleichungen aufstellen.

Die Frage nach dem ***Logarithmuswert*** führt mit x als gesuchtem Wert auf eine Gleichung der Form

$$log_a(b) = x.$$

Die Frage nach der ***Basis*** führt mit x als gesuchtem Wert auf eine Gleichung der Form

$$log_x(b) = c.$$

Die Frage nach dem ***Numerus*** (auch Logarithmusargument genannt) führt mit x als gesuchtem Wert auf eine Gleichung der Form

$$log_a(x) = c.$$

Rechenregelen, Beispiel und Aufgaben hierzu findest du im Kapitel Logaritmische Gleichungen.