



Aufgabenblatt zu Potenzen mit gleicher Basis



Level 3 – Expert – Blatt 2
Dokument mit 11 Aufgaben

Aufgabe A1

Bringe auf den kleinsten gemeinsamen Nenner und vereinfache.

$$\frac{y^{n-2}}{1-y} - \frac{y^{n-1}}{1+y} + \frac{y^n}{y^2-1}$$



Aufgabe A2

Bringe auf einen gemeinsamen Nenner und vereinfache.

$$\frac{1}{x^{n-2}} - \frac{2x^{n+2}+5x^3}{x^{2n}} + \frac{3x^{n-1}+5}{x^{2n-3}}$$

Aufgabe A3

Vereinfache so weit wie möglich.

$$\frac{6^{2k-1}+1}{6^{2k}} - \frac{1-6^{2k-3}}{2 \cdot 6^{2k-1}} + \frac{6^2+36^k}{3 \cdot 6^{2k+1}}$$

Aufgabe A4

Vereinfache so weit wie möglich.

$$\frac{2-x^{k-1}}{x^{k-2}} - \frac{1}{x^{k+4}} - \frac{4-3x^k}{x^{k-1}} - \frac{2x^6-4x^5-1}{x^{k+4}}$$

Aufgabe A5

Fasse zusammen und kürze so weit wie möglich.

$$\frac{b^{3-3n}-1}{b^{2-n}} + \frac{1+b^{-4n+4}}{b^n} - \frac{b^{n-1}+1}{b^{2n-1}}$$

Aufgabe A6

Vereinfache so weit wie möglich.

$$\frac{2-b}{b^{-n}} + \frac{b^2+1}{b^{-n+1}} - \frac{b+b^2}{b^{-n+2}}$$

Aufgabe A7

Welche der Potenzen

$$(a^2)^n$$

$$a \cdot a^n$$

$$a^{n-1}$$

$$a^{n-1} \cdot a^{n+1}$$

$$\frac{1}{a^n}$$

$$a^0$$

stimmen überein mit

$$a^{2n}$$

$$\frac{1}{a^{1-n}}$$

$$a^{n+1}$$

$$a^{-n}$$

$$1$$

?



Aufgabenblatt zu Potenzen mit gleicher Basis



Level 3 – Expert – Blatt 2

Aufgabe A8

Bei der Geburt seines Sohnes legt Herr Franz einmalig 1000 EUR auf einem Konto an. Er rechnet mit einer jährlichen Verzinsung von 4,5 %. Welche Summe kann der Sohn an seinem 18. Geburtstag auf dem Konto erwarten?

Aufgabe A9

Ein Ball fällt aus 3,5 m Höhe auf den Boden. Nach jeder Bodenberührung erreicht er noch 80 % seiner jeweiligen Ausgangshöhe. Wie hoch springt der Ball noch nach 5 Bodenkontakten?

Aufgabe A10

Die Bevölkerung eines Staates wächst um 1,5 % pro Jahr. Um wie viel nimmt die Einwohnerzahl bis 2025 zu, wenn die Zahl des Jahres 2008 45,6 Millionen beträgt?

Aufgabe A11

Tierschützer befürchten, dass die Population einer seltenen Tierart in den nächsten 20 Jahren auf die Hälfte ihres Bestands zurückgeht. Ein Forscher behauptet, dass diese Population jährlich um 3 % abnimmt. Decken sich die beiden Aussagen?

Lösung A1

$$\begin{aligned} \frac{y^{n-2}}{1-y} - \frac{y^{n-1}}{1+y} + \frac{y^n}{y^2-1} &= \\ -\frac{y^{n-2}}{y-1} - \frac{y^{n-1}}{y+1} + \frac{y^n}{(y+1)(y-1)} &= \\ \frac{-y^{n-2}(y+1) - y^{n-1}(y-1) + y^n}{(y+1)(y-1)} &= \\ \frac{y^n - y^{n-1} - y^{n-2} - y^n + y^{n-1}}{(y+1)(y-1)} &= \\ \frac{-y^{n-2}}{(y+1)(y-1)} = \frac{y^{n-2}}{(-1)(y+1)(y-1)} &= \\ \frac{y^{n-2}}{-(y^2-1)} = \frac{y^{n-2}}{1-y^2} &= \end{aligned}$$

Vereinheitlichung der Nenner

Gemeinsamer Nenner

Zähler ausmultiplizieren

Zähler zusammenfassen

Ausdruck vereinfachen und Ergebnis

Lösung A2

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{n-2}} - \frac{2x^{n+2}+5x^3}{x^{2n}} + \frac{3x^{n-1}+5}{x^{2n-3}} &= \\ \frac{x^{n-1} - x^{-3}(2x^{n+2}+5x^3) + 3x^{n-1}+5}{x^{2n-3}} &= \\ \frac{x^{n-1} - 2x^{n-1} - 5 + 3x^{n-1} + 5}{x^{2n-3}} &= \\ \frac{x^{n-1} + x^{n-1}}{x^{2n-3}} = \frac{2x^{n-1}}{x^{2n-3}} &= \\ 2x^{n-1} \cdot x^{3-2n} = 2 \cdot x^{2-n} &= \end{aligned}$$

Gemeinsamer Nenner

Zähler ausmultiplizieren

Zusammenfassen, Vereinfachen

weiter vereinfachen und Ergebnis

Lösung A3

$$\begin{aligned} \frac{6^{2k-1}+1}{6^{2k}} - \frac{1-6^{2k-3}}{2 \cdot 6^{2k-1}} + \frac{6^2+36^k}{3 \cdot 6^{2k+1}} &= \\ \frac{6 \cdot 6^1(6^{2k-1}+1) - 3 \cdot 6^2(1-6^{2k-3}) + 2 \cdot (6^2+36^k)}{6 \cdot 6^{2k+1}} &= \\ \frac{6^{2k+1} + 6^2 - 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6^{2k-1} + 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^{2k}}{6^{2k+2}} &= \\ \frac{6^{2k+1} + 3 \cdot 6^{2k-1} + 2 \cdot 6^{2k}}{6^{2k+2}} = \frac{6^{2k}(6+3 \cdot 6^{-1}+2)}{6^{2k} \cdot 6^2} &= \\ \frac{6+3 \cdot 6^{-1}+2}{36} = \frac{8+\frac{3}{6}}{36} = \frac{8,5}{36} = \frac{17}{72} &= \end{aligned}$$

Gemeinsamer Nenner

Zähler ausmultiplizieren

Zusammenfassen, Vereinfachen

weiter vereinfachen und Ergebnis

Lösung A4

$$\begin{aligned} \frac{2-x^{k-1}}{x^{k-2}} - \frac{1}{x^{k+4}} - \frac{4-3x^k}{x^{k-1}} - \frac{2x^6-4x^5-1}{x^{k+4}} &= \\ \frac{x^6(2-x^{k-1}) - 1 - x^5(4-3x^k) - 2x^6+4x^5+1}{x^{k+4}} &= \\ \frac{2x^6 - x^{k+5} - 1 - 4x^5 + 3x^{k+5} - 2x^6 + 4x^5 + 1}{x^{k+4}} &= \\ \frac{-x^{k+5} + 3x^{k+5}}{x^{k+4}} &= \\ \frac{x^{k+4}(-x+3x)}{x^{k+4}} = 2x &= \end{aligned}$$

Gemeinsamer Nenner

Zähler ausmultiplizieren

Zusammenfassen, Vereinfachen

weiter vereinfachen und Ergebnis

Lösung A5

$$\frac{b^{3-3n-1}}{b^{2-n}} + \frac{1+b^{-4n+4}}{b^n} - \frac{b^{n-1}+1}{b^{2n-1}} =$$

$$\frac{b^{3n-3-1}+b^{2-2n} \cdot (1+b^{-4n+4}) - b^{3-3n} \cdot (b^{n-1}+1)}{b^{2-n}} = | \text{Gemeinsamer Nenner}$$

$$\frac{b^{3-3n-1}+b^{2-2n}+b^{6-6n}-b^{2-2n}-b^{3-3n}}{b^{2-n}} = | \text{Zähler ausmultiplizieren}$$

$$\frac{b^{6-6n}-1}{b^{2-n}} = | \text{Zusammenfassen, Vereinfachen}$$

$$\frac{b^{6-6n}}{b^{2-n}} - \frac{1}{b^{2-n}} = b^{-5n+4} - b^{n-2} \quad | \text{weiter vereinfachen und Ergebnis}$$

Lösung A6

$$\frac{2-b}{b^{-n}} + \frac{b^2+1}{b^{-n+1}} - \frac{b+b^2}{b^{-n+2}} =$$

$$\frac{b^2(2-b)+b(b^2+1)-(b+b^2)}{b^{-n+2}} = | \text{Gemeinsamer Nenner}$$

$$\frac{2b^2-b^3+b^3+b-b-b^2}{b^{-n+2}} = | \text{Zähler ausmultiplizieren}$$

$$\frac{b^2}{b^{-n+2}} = b^n \quad | \text{Zusammenfassen, Vereinfachen}$$

Lösung A7

Wir gehören zusammen:

$(a^2)^n$	$\frac{1}{a^n}$	$a \cdot a^n$	a^{n-1}	a^0
$a^{n-1} \cdot a^{n+1}$				

mit

a^{2n}	a^{-n}	a^{n+1}	$\frac{1}{a^{1-n}}$	1
----------	----------	-----------	---------------------	---

Lösung A8Aufgabe zur Kapitalentwicklung mit $K_n = K_0 \cdot q^n$ $(K_n = \text{Endkapital}, K_0 = \text{Anfangskapital}, q = \text{Zinsfaktor mit } q = 1 + \frac{p\%}{100}, n = \text{Jahre})$

$K_0 = 1000; q = 1 + \frac{4,5\%}{100} = 1,045; n = 18$

$K_{18} = 1000 \cdot 1,045^{18} = 2208,48$

Der Sohn kann an seinem 18. Geburtstag 2208,48 € auf seinem Konto erwarten.

Lösung A9Aufgabe zur exponentiellen Abnahme $h_n = h_0 \cdot a^n$ $(h_n = \text{Endhöhe}, h_0 = \text{Anfangshöhe}, a = \text{Basis mit } a = 1 - \frac{p\%}{100}, n = \text{Anzahl}$

Bodenkontakte)

$h_0 = 1 \text{ m}; a = 1 - \frac{20\%}{100} = 0,8; n = 5$

$h_5 = 1 \cdot 0,8^5 = 0,16$

Der Ball springt nach 5 Bodenkontakten nur noch 0,16 m hoch.



Aufgabenblatt zu Potenzen mit gleicher Basis



Potenzen
Lösungen

Level 3 – Expert – Blatt 2

Lösung A10

Aufgabe zur exponentiellen Zunahme $B_n = B_0 \cdot a^n$

(B_n =Endbestand, B_0 =Anfangsbestand, a =Basis mit $a = 1 + \frac{p\%}{100}$, n =Anzahl Jahre)

$$B_0 = 45,6 \text{ Mio}; a = 1 + \frac{1,5\%}{100} = 1,015; n = 2025 - 2008 = 17$$

$$B_{17} = 45,6 \cdot 1,015^{17} \approx 50,7$$

$$B_{17} - B_0 = 50,7 - 45,6 = 13,1$$

Die Einwohnerzahl nimmt bis zum Jahre 2025 um 13,1 Millionen zu.

Lösung A11

Aufgabe zur exponentiellen Zunahme $B_n = B_0 \cdot a^n$

Rückgang auf die Hälfte bedeutet $\frac{B_n}{B_0} = 50\% = 0,5$

a =Basis mit $a = 1 - \frac{p\%}{100}$; $n = 20$

Nach Behauptung des Forschers gilt: $a = 1 - \frac{3\%}{100} = 0,97$

$$0,5 \stackrel{?}{=} 0,97^{20}$$

$$0,97^{20} = 0,54 = 54\%$$

Die Behauptung des Forschers deckt sich nur ungefähr mit der Aussage der Tierschützer. In Anbetracht der geringen Abweichung und der Tatsache, dass der Prozentsatz der Abnahme in den 20 Jahren auch Schwankungen unterliegen sein wird, kann man von einer deckungsgleichen Aussage ausgehen.