Das ***Potenzieren*** (von lat. *potentia*, „Vermögen, Macht“, als Lehnübersetzung aus gr. *δύναμις*, das in der antiken Geometrie spätestens seit Platon auch die Bedeutung ‚Quadrat‘ hatte), ist wie das Multiplizieren seinem Ursprung nach eine abkürzende Schreibweise für eine wiederholte mathematische Rechenoperation. Wie beim *Multiplizieren* ein Summand wiederholt *addiert* wird, so wird beim *Potenzieren* ein Faktor wiederholt *multipliziert*.

Beispiel 1: Die Zahl 8 soll fünfmal mit sich selbst multipliziert werden. Wir schreiben:

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 32768$$

In abgekürzter Schreibweise dürfen wir schreiben:

$$8^5 = 32768$$

In diesem Beispiel wird die Zahl 8 als Basis oder Grundzahl bezeichnet, die Zahl 5 heißt Exponent oder Hochzahl. Der Ausdruck 8^5 wird „acht hoch fünf“ gesprochen. Das Ergebnis der Rechnung nennen wir den Wert der Potenz. Nun dürfen wir als Basis auch eine Variable (a, b, c…usw.) oder eine Unbekannte (x, y) wählen. Als Variable für den Exponenten verwenden wir jedoch ausschließlich den Buchstaben n. Die allgemeine Form einer Potenz wird also durch a^n ausgedrückt.

Merksatz

*Einen Ausdruck der Form a^n bezeichnen wir als Potenz. a heißt **Grundzahl** oder **Basis**, n heißt **Hochzahl** oder **Exponent**.*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}; \mid a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Wir sprechen diese Rechenoperation als „a hoch n„ oder „a zur n–ten Potenz“ oder kurz „a zur n–ten“. Im Fall $n = 2$ ist auch „a (zum) Quadrat“ und im Fall $n = 3$ auch „a (zum) Kubik“ üblich.

Beispiel 2: Die Zahl 1 soll fünfmal durch die Zahl 8 dividiert werden. Wir schreiben:

$$1:8:8:8:8:8 = 0{,}00003052$$

In abgekürzter Schreibweise dürfen wir schreiben:

$$\frac{1}{8^5} = 0{,}00003052$$

Im Nenner dieser Operation steht eine Potenz mit der Basis 8 und dem Exponenten 5. Dieser Ausdruck wird „eins (geteilt) durch acht hoch fünf“ gesprochen.
Nun ist der Mathematiker von zu Hause aus ein fauler Mensch und mag nicht $\frac{1}{8^5}$ schreiben, weil 8^{-5} schneller zu schreiben geht. Wir haben es also mit einem negativen Exponenten zu tun.

Merksatz

Negative Hochzahlen bedeuten, dass man die zur Multiplikation inverse Operation = Division durchführen soll. Also „Dividiere die Zahl 1 durch die Basis so oft, wie der Exponent angibt."

$$a^{-n} = 1 : \underbrace{a : a : a : \ldots : a}_{n \text{ Divisoren}}; \mid a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}$$

Beispiel 3: Die Zahl 7 soll nullmal mit sich selbst multipliziert werden. Wir schreiben:

??????????????????????????????????? ja, was schreiben wir?

Wir schreiben zunächst einmal $7 = 1 \cdot 7$. Und jetzt multiplizieren wir einfach die 1 und die 7 0-mal mit sich selbst, also gar nicht. Was ergibt das? Eine 1.

Merksatz

Wird eine Basis a Null mal mit sich selbst multipliziert, so ist das Ergebnis 1.

$$a^0 = 1 \;\; für \; a \neq 0$$

Die Einschränkung $a \neq 0$ ist hier erforderlich, da 0^0 mathematisch nicht definiert ist.

Beispiel 4: Die Zahl 6^2 soll viermal mal mit sich selbst multipliziert werden. Wir schreiben:

$$6^2 \cdot 6^2 \cdot 6^2 \cdot 6^2 = (6^2)^4 = (6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6) = 6^8$$

In abgekürzter Schreibweise dürfen wir schreiben:

$$(6^2)^4 = 6^8$$

In diesem Beispiel gilt die Zahl 6^2 als Basis und die Zahl 4 ist der Exponent. Die 6^2 wird viermal mit sich selbst multipliziert.

Wir erkennen am Beispiel, dass hier die Basis 6 beibehalten wurde und lediglich die beiden Exponenten 2 und 4 mit einander multipliziert wurden.

Merksatz

Die Basis a einer Potenz kann selbst eine Potenz sein, z. B. b^n.

$$\boldsymbol{(b^n)^m = \underbrace{b^n \cdot b^n \cdot b^n \cdot \ldots \cdot b^n}_{m \text{ Faktoren}}; \;\mid a \in \mathbb{R}^*, n; m \in \mathbb{N}}$$

In diesem Falle sprechen wir von der Potenzierung einer Potenz.

Beispiel 5: Die Zahl 5 soll 2,5 mal mit sich selbst multipliziert werden. Wir schreiben:

$5^{2,5}$. Was rechnen wir hier?

Zunächst rechnen wir die 2,5 in einen Bruch um. $2{,}5 = \frac{5}{2}$. Dies ist eine rationale Zahl mit $5 \in \mathbb{Z}$ im Zähler und $2 \in \mathbb{N}^*$ im Nenner. Nun gilt:

$$5^{2,5} = 5^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{5^5} = 55{,}9017$$

Ist der Exponent eine rationale Zahl mit $m \in \mathbb{Z}$ im Zähler und $n \in \mathbb{N}^*$ im Nenner, so ist m der Exponent der Basis und n der Wurzelexponent der Wurzelbasis hoch m.

Merksatz

Sei q eine rationale Zahl und $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ ihre gekürzte Bruch-darstellung. Für beliebige reelle $a > 0$ definieren wir

$$\pm a^q = \pm a^{\frac{m}{n}} = \pm\sqrt[n]{a^m} = \pm(\sqrt[n]{a})^m$$

Für beliebige reelle $a < 0$ definieren wir

$$(-a)^q = (-a)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(-a)^m} = (\sqrt[n]{-a})^m$$

Für n gerade ist $(\sqrt[n]{-a})^m$ nicht definiert.

Für n ungerade ist $(\sqrt[n]{-a})^m = -(\sqrt[n]{a})^m$.

Diese Einführung führt uns zu den einzelnen Potenzregeln. Diese regeln im Allgemeinen, wie Potenzen untereinander berechnet werden. Für Potenzen gibt es nur Regeln für

- die Multiplikation,
- die Division und das
- Potenzieren von Potenzen.

Dies rührt daher, weil Potenzen selbst eine verkürzte Schreibweise von Multiplikationen und/oder Divisionen sind. Deshalb gibt es nur vier Potenzgesetze und zwar:

1. Potenzgesetz

Beispiel 6:

$$x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$$
$$y^2 \cdot y^3 = y^5$$
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Wie du aus den Beispielen erkennst, ist die Basis der Rechenoperation immer dieselbe, sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite der Gleichung. Die Basis wird also beibehalten und im Ergebnis stellst du fest, dass die Hochzahlen einfach nur addiert wurden. Bei $y^2 \cdot y^3$ wurden lediglich die Hochzahlen 2 und 3 addiert. Bei $a^n \cdot a^m$ wurden die Hochzahlen n und m addiert.

Jetzt frägst du dich, im Beispiel $x \cdot x \cdot x \cdot x$ sind ja gar keine Hochzahlen da. Nun, dies ist wiederum der Faulheit der Mathematiker zuzuschreiben, denn alles, was die nicht schrieben müssen, schreiben die auch nicht hin. In Gedanken hat jede Zahl oder jede Variable die Hochzahl 1. Man hätte also auch schreiben können $x^1 \cdot x^1 \cdot x^1 \cdot x^1$. Aber wie schon erwähnt, Mathematiker sind faule Leute. Somit kommen wir zur ersten Regel:

1. Potenzgesetz

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Hochzahlen addiert. Es gilt: $\boldsymbol{p^r \cdot p^s \cdot p^t = p^{r+s+t}}$

2. Potenzgesetz

Beispiel 7:

$x^4 : x^3 = x$ bzw. $\frac{x^4}{x^3} = x$

$y^2 : y^3 = y^{-1}$ bzw. $\frac{y^2}{y^3} = y^{-1}$

$a^n : a^m = a^{n-m}$ bzw. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Wie du aus den Beispielen erkennst, ist die Basis der Rechenoperation immer dieselbe, sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite der Gleichung. Die Basis wird also beibehalten und im Ergebnis stellst du fest, dass die Hochzahlen einfach nur subtrahiert wurden. Bei $y^2 : y^3$ wurden lediglich die Hochzahlen 2 und 3 subtrahiert. Bei $a^n : a^m$ wurden die Hochzahlen n und m voneinader subtrahiert. Damit kommen wir zur zweiten Regel:

2. Potenzgesetz

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Hochzahlen subtrahiert. Es gilt: $\boldsymbol{p^r : p^s : p^t = p^{r-s-t}}$

3. Potenzgesetz

Beispiel 8:

$(x^2)^3 = x^{2\cdot 3} = x^6$

$(y^{-1})^{-4} = y^{(-1)\cdot(-4)} = y^4$

$0(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

Wie du aus den Beispielen erkennst, wird hier eine Potenz potenziert. Im Ergebnis stellst du fest, dass die Hochzahlen jetzt multipliziert wurden. Bei $(x^2)^3$ wurden lediglich die Hochzahlen 2 und 3 multipliziert. Bei $(y^{-1})^{-4}$ wurden die Hochzahlen -1 und -4 multipliziert und bei $(a^n)^m$ waren es die Hochzahlen n und m. Damit kommen wir zur dritten Regel:

3. Potenzgesetz

Potenzen werden potenziert, indem man die Hochzahlen multipliziert. Es gilt:

$$\boldsymbol{((p^r)^s)^t = p^{r\cdot s\cdot t}}$$

4. Potenzgesetz

Beispiel 9:

$2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3$

$y^4 \cdot z^4 = (y \cdot z)^4$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^m = \left(\frac{3a}{bx}\right)^m$

Wie du aus den Beispielen erkennst, ist hier der Exponent der Potenz immer gleich, jedoch hat die Basis jeweils einen anderen Wert. In diesem Fall dürfen wir die Multiplikation/Division der beiden Basiszahlen in eine Klammer schreiben und den Exponenten auf die Klammer anwenden. Dies führt uns zur vierten Regel:

4. Potenzgesetz

Potenzen mit gleichem Exponenten und unterschiedlicher Basis werden multipliziert bzw. dividiert, indem man die Basis miteinander multipliziert/dividiert und den Exponenten beibehält.

Es gilt: $\boldsymbol{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$ *bzw.*

$a^n : \boldsymbol{b^n} = \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{n}}$