Prüfungsaufgaben Zinseszinsen Klasse 10

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de
© by Fit-in-Mathe-Online.de

Inhaltsverzeichnis

Prüfungsaufgaben Zinseszinsen Klasse 10

© by Fit-in-Mathe-Online.de

Kapitel mit 160 Aufgaben

	Seite
Prüfungsaufgaben Zinseszinsen Klasse 10	
WIKI zu den Prüfungsaufgaben	03
Aufgabenblätter	
Aufgabenblatt 01 Aufgaben 01 - 08 *(28 Aufgaben)*	04
Lösungen zum Aufgabenblatt 01	06
Aufgabenblatt 02 Aufgaben 09 - 16 *(25 Aufgaben)*	11
Lösungen zum Aufgabenblatt 02	14
Aufgabenblatt 03 Aufgaben 07 - 24 *(23 Aufgaben)*	18
Lösungen zum Aufgabenblatt 03	20
Aufgabenblatt 04 Aufgaben 25 - 32 *(20 Aufgaben)*	24
Lösungen zum Aufgabenblatt 04	26
Aufgabenblatt 05 Aufgaben 33 - 40 *(25 Aufgaben)*	30
Lösungen zum Aufgabenblatt 05	32
Aufgabenblatt 06 Aufgaben 41 - 48 *(22 Aufgaben)*	36
Lösungen zum Aufgabenblatt 06	38
Originalaufgaben Abschlussprüfung Realschule	
Übungen zu Sparen Zinsen Zinseszins *(6 Aufgaben)*	41
Lösungen zu den Übungsaufgaben	44
Prüfungsaufgaben Zinseszins 2003 – 2008 *(6 Aufgaben)*	49
Lösungen zu den Prüfungsaufgaben 2003 – 2008	51
Prüfungsaufgaben Zinseszins 2009 – 2020 *(5 Aufgaben)*	54
Lösungen zu den Prüfungsaufgaben 2009 – 2020	56

Aufgabe A1

Herr Mustafa erbt $16\,340$ €. Er legt das Geld für 5 Jahre zu $7{,}5$ % auf Zinseszinsen.

a) Auf welche Summe wächst das Geld bis dahin an?
b) In wie vielen Jahren würde sich das Geld bei gleichem Zinsfuß verdreifachen?
c) Mit wie viel Prozent müsste das Geld angelegt sein, damit es sich in 10 Jahren verdoppelt?

Aufgabe A2

Eine Erbschaft von $63\,400$ € trägt 6 Jahre Zinseszinsen zu einem Zinssatz von $6{,}5$ %.

a) Auf welche Summe wächst sie bis dahin an?
b) In wie vielen Jahren würde sie sich bei gleichem Zinssatz verdoppeln?
c) Mit wie viel Prozent müsste sie angelegt sein, damit sie sich in 13 Jahren verdoppelt?

Aufgabe A3

Ein Sparkonto von $1\,800$ € stand 5 Jahre bei 6 % auf Zinseszinsen. Dann wurde der Zinssatz um $0{,}5$ % erhöht.

a) Nach wie vielen weiteren Jahren war das Guthaben auf $3\,743$ € angewachsen?
b) Um wie viel Prozent hätte sich der Zinssatz erhöhen müssen, wenn das Guthaben in der gleichen Zeit (wie in a)) auf $3\,991{,}73$ € hätte anwachsen sollen?

Aufgabe A4

In einem Testament wird bestimmt, dass die gestiftete Summe von $278\,500$ € so lange auf Zinseszinsen zu $3{,}5$ % stehen soll, bis sie die Höhe von $500\,000$ € erreicht hat. Dann erst soll der jährliche Zinsertrag für die Unterstützung Bedürftiger zur Auszahlung gelangen.

a) Wie lange dürfen die Zinsen nicht angegriffen werden?
b) Welcher Zinsertrag gelangt später zur Verteilung? ($p\,\% = 3{,}5\,\%$)
c) Wie hoch müsste der Zinssatz sein, wenn sich das Anfangskapital in 10 Jahren verdoppeln soll?

Aufgabe A5

a) Welches Kapital muss ein Sparer einzahlen, wenn er bei einem Zinssatz von $7{,}25$ % in 12 Jahren über $20\,000$ € verfügen will?
b) In wie vielen Jahren und Tagen wächst ein Kapital von $5\,200$ € bei einem Zinssatz von $7{,}5$ % auf genau $10\,000$ € an?
c) Bei welchem Zinssatz verdoppelt sich ein Kapital in 10 Jahren?
d) In wie vielen Jahren und Tagen verdreifacht sich ein Kapital bei einem Zinssatz von $8{,}5$ %?

Aufgabe A6

Die Herren Müller, Maier und Schulze haben sich Anfang 2000 einen Lottogewinn von 27 000 € geteilt und ihren Anteil auf Sparkonten eingezahlt. 2006 treffen sie sich wieder.
Herr Müller hat jetzt 12 234,20 € auf seinem Konto. Herr Maier hat sein Konto schon nach relativ kurzer Zeit aufgelöst. Er erhielt 9 978,50 € bei einem Zinssatz von 3,5 %. Herr Schulze spart sein Geld über 12 Jahre bei einem Zinssatz von 8 %.

a) Welchen Zinssatz gewährt die Bank des Herrn Müller?
b) Wie lange hat Herr Maier sein Geld gespart?
c) Wie viele € werden Herrn Schulze im Jahre 2012 ausgezahlt?
d) In welchem Kalenderjahr verdoppelt sich das Startkapital des Herrn Schulze?

Aufgabe A7

Ein reicher Patenonkel möchte seinem Neffen, der gerade 14 Jahre alt geworden ist, zur Konfirmationen und zum Geburtstag zusammen ein Geldgeschenk von 3 000 € machen. Das Geld wird aber auf einem Bankkonto angelegt und steht dem jungen Mann erst am 25. Geburtstag zur Verfügung.

a) Wie groß ist das Kapital, wenn der Neffe es am 25. Geburtstag abhebt und die Bank 7,2 % Zinseszins gewährt hat?
b) Welche Summe müsste der Onkel zur Konfirmation verschenken, wenn der Neffe am 25. Geburtstag bei gleichen Bedingungen 10 000 € zur Verfügung haben soll?
c) Wie lange muss der Neffe das geschenkte Geld zu den Bedingungen von a) anlegen, um die bei b) gewünschte Summe zu erzielen, wenn er zusätzlich zu dem Geldgeschenk des Patenonkels auch noch die 375 € anlegt, die er sich aus mehreren kleinen Geldgeschenken erspart hat? (Jahre, Monate, Tage)
d) Wie hoch müsste der Zinssatz sein, um das Kapital des Neffen (siehe c)) bis zum 25. Lebensjahr auf den gewünschten Wert von 10 000 € zu bringen?
e) Der reiche Onkel schenkt der kleinen Schwester, die gerade 5 Jahre alt ist, gleichzeitig eine Spardose mit 5 € und verspricht, das Kapital bis zu ihrer Konfirmation (14. Geburtstag) an jedem Geburtstag zu verdoppeln. Wie viel Geld hat sie dann von ihrem Onkel bekommen?

Aufgabe A8

Ein Sparguthaben von 10 000 € wird auf 7,5 % Zinseszins angelegt.

a) Auf welchen Betrag ist das Guthaben nach 6 Jahren angewachsen?
b) Nach wie vielen Jahren hat sich das Guthaben verdoppelt?
c) Zu welchem Zinseszinssatz wäre das Guthaben angelegt worden, wenn es nach 10 Jahren auf 18 335,36 € angewachsen wäre?
d) Wie viele € müssten angelegt werden, wenn man nach 8 Jahren bei einem Zinseszinssatz von 6,5 % ein Guthaben von 12 500 € besitzen möchte?

Lösung A1

$K_0 = 16340; \quad n = 5; \quad p\,\% = 7{,}5\,\%$

a) $K_5 = 16340 \cdot 1{,}075^5 = 23458{,}18$

Das Kapital wächst auf $23\,458{,}18$ € *an.*

b) $K_n = 3 \cdot K_0 = 3 \cdot 16340 = 49020$

$49020 = 16340 \cdot 1{,}075^n \quad | \quad :16340$

$3 = 1{,}075^n \quad | \quad log$

$log(3) = n \cdot log\,(1{,}075) \quad | \quad :log\,(1{,}075)$

$n = 15{,}2$

Im 16. *Jahr erreicht das Kapital erstmals das Dreifache seines Anfangskapitals.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 16340 \cdot 1{,}075 = 17565{,}50$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}075 = 18882{,}91$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}075 = 20229{,}13$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}075 \ldots$

… usw. bis

$K_{15} = K_{14} \cdot 1{,}075 = 48348{,}06{,}82$

$K_{16} = K_{15} \cdot 1{,}075 = 51974{,}16$

c) $K_{10} = 2 \cdot K_0 = 2 \cdot 16340 = 32680$

$32680 = 16340 \cdot q^{10} \quad | \quad :16340$

$q^{10} = 2 \quad | \quad \sqrt[10]{}$

$q = 1{,}072$

$p\,\% = (1{,}072 - 1) \cdot 100 = 7{,}2\,\%$

Das Kapital müsste mit $7{,}2\,\%$ *verzinst werden.*

Lösung A2

$K_0 = 63400; \quad n = 6; \quad p\,\% = 6{,}5\,\%$

a) $K_6 = 63400 \cdot 1{,}065^6 = 92509{,}62$

Das Kapital wächst auf $92\,509{,}62$ € *an.*

b) $K_n = 2 \cdot K_0 = 2 \cdot 63400 = 126800$

$4126800 = 63400 \cdot 1{,}065^n \quad | \quad :63400$

$2 = 1{,}065^n \quad | \quad log$

$log(2) = n \cdot log\,(1{,}065) \quad | \quad :log\,(1{,}065)$

$n = 11{,}0$

In 11 *Jahren hat sich das Kapital verdoppelt.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 63400 \cdot 1{,}065 = 67521{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}065 = 71909{,}87$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}065 = 76584{,}01$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}065 \ldots$

… usw. bis

$K_{10} = K_{09} \cdot 1{,}065 = 191010{,}52$

$K_{11} = K_{10} \cdot 1{,}065 = 126746{,}20 \approx 126800$

c) $126800 = 63400 \cdot q^{13} \quad | \quad :63400$

$q^{13} = 2 \quad | \quad \sqrt[10]{}$

$q = 1{,}055$

$p\,\% = (1{,}055 - 1) \cdot 100 = 5{,}5\,\%$

Das Kapital müsste mit $5{,}5\,\%$ *verzinst werden.*

Lösung A3

$K_0 = 1800;\quad n = 5;\quad p\,\% = 6\,\%$

a) Kapital nach 5 Jahren:

$K_5 = 1800 \cdot 1{,}06^5 = 2408{,}81$

Ab Jahr 6: $p\,\% = 6{,}5\,\%$

Neues Guthaben nach n weiteren Jahren: $K_n = 3743$

$3743 = 2408{,}81 \cdot 1{,}065^n \quad | \quad :2408{,}81$

$1{,}5539 = 1{,}065^n \quad | \quad log$

$log(1{,}5539) = n \cdot log\,(1{,}065) \quad | \quad :log\,(1{,}065)$

$n = 6{,}99$

Nach etwa weiteren 7 Jahren erreicht das Kapital einen Betrag von 3 743 €.

Ohne Logarithmus:

$K_6 = 2408{,}81 \cdot 1{,}065 = 25685{,}38$

$K_7 = K_6 \cdot 1{,}065 = 2732{,}13$

$K_8 = K_6 \cdot 1{,}065 = 2909{,}72$

$K_9 = K_8 \cdot 1{,}065 \ldots$

… usw. bis

$K_{11} = K_{10} \cdot 1{,}065 = 3514{,}80$

$K_{12} = K_{11} \cdot 1{,}065 = 3743{,}25$

b) Zinssatz $p\,\%$ für $K_{12} = 3\,991{,}73$ €

$3991{,}73 = 2408{,}81 \cdot q^7 \quad | \quad :2408{,}81$

$q^7 = 1{,}6571 \quad | \quad \sqrt[7]{}$

$q = 1{,}0748$

$p\,\% = (1{,}0748 - 1) \cdot 100 = 7{,}48\,\%$

Der Zinssatz hätte auf 7,5 % *angehoben werden müssen.*

Lösung A4

$K_0 = 278500;\quad K_n = 500000;\quad p\,\% = 3{,}5\,\%$

a) $500000 = 278500 \cdot 1{,}035^n \quad | \quad :278500$

$1{,}7953322136 = 1{,}035^n \quad | \quad log$

$log(1{,}7953322136) = n \cdot log\,(1{,}035) \quad | \quad :log\,(1{,}035)$

$n = 17$

Das Kapital darf 17 *Jahre lang nicht angerührt werden.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 278500 \cdot 1{,}035 = 287730{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}035 = 297800{,}55$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}035 = 308223{,}57$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}035 \ldots$

… usw. bis

$K_{16} = K_{15} \cdot 1{,}035 = 482915{,}11$

$K_{17} = K_{16} \cdot 1{,}035 = 499817{,}14 \approx 500000$

b) Zur Verteilung kommt jedes Jahr die Zinsen, das Kapital bleibt unangerührt.

$Z = \frac{K_{17} \cdot 3{,}5}{100} = 17493{,}60$

Jährlich gelangen 17 493,60 € *Zinsen zur Verteilung.*

c) Zinssatz $p\,\%$ für $K_{10} = 557\,000$ €

$557000 = 278500 \cdot q^{10} \quad | \quad :278500$

$q^{10} = 2 \quad | \quad \sqrt[10]{}$

$q = 1{,}072$

$p\,\% = (1{,}072 - 1) \cdot 100 = 7{,}2\,\%$

Das Kapital müsste mit 7,2 % *verzinst werden.*

Lösung A5

a) $K_{12} = 20000;\quad n = 12\,J;\quad p\,\% = 7{,}25\,\%$

$20000 = K_0 \cdot 1{,}0725^{12} \qquad | \quad : 1{,}0725^{12}$

$K_0 = 8635$

Der Sparer hätte $8\,635$ € *anlegen müssen.*

b) $K_n = 10000;\quad K_0 = 5200;\quad p\,\% = 7{,}5\,\%$

$10000 = 5200 \cdot 1{,}075^n \qquad | \quad : 5200$

$1{,}923076923 = 1{,}075^n \qquad | \quad log$

$log(1{,}923076923) = n \cdot log\,(1{,}075) \qquad | \quad : log\,(1{,}075)$

$n = 9{,}04$

Umrechnung von $0{,}04$ Jahre in Tage:

$t = 360 \cdot 0{,}04 = 14{,}4 \;\approx 15$

Das Kapital muss 9 *Jahre und* 15 *Tage liegen bleiben.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 5200 \cdot 1{,}075 = 5590{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}075 = 6009{,}25$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}075 = 6459{,}94$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}075 \ldots$

… usw. bis

$K_8 = K_{15} \cdot 1{,}075 = 9274{,}08$

$K_9 = K_{16} \cdot 1{,}035 = 9969{,}64$

$10000 - 9969{,}64 = 30{,}36$

$Z = \frac{9969{,}64 \cdot t \cdot 7{,}5}{100} = 30{,}36$

$30{,}36 = 747{,}72 \cdot t \qquad | \quad : 747{,}72$

$t_J = 0{,}04 \qquad | \quad \cdot 12$

$t_M = 0{,}48 \qquad | \quad \cdot 30$

$t_T = 14{,}4 \approx 15$

c) $2 = q^{10} \qquad | \quad \sqrt[10]{}$

$q = 1{,}072$

$p\,\% = (1{,}072 - 1) \cdot 100 = 7{,}2\,\%$

Bei etwa $7{,}2\,\%$ *verdoppelt sich ein Kapital in* 10 *Jahren.*

d) $3 = 1{,}085^n \qquad | \quad log$

$log(3) = n \cdot log\,(1{,}085) \qquad | \quad : log\,(1{,}085)$

$n = 13{,}4667$

Umrechnung von $0{,}4667$ Jahre in Tage:

$t = 360 \cdot 0{,}4667 = 168$

Bei $8{,}5\,\%$ *verdreifacht sich ein Kapital in* 13 *Jahren und* 168 *Tagen.*

Lösung A6

$K_0 = 9000;\;\; n = 6$

a) Herr Müller:

$K_6 = 12234{,}20$

$12234{,}20 = 9000 \cdot q^6 \qquad | \quad : 9000$

$q^6 = 1{,}359355556 \qquad | \quad \sqrt[6]{}$

$q = 1{,}0525$

$p\,\% = (1{,}0525 - 1) \cdot 100 = 5{,}25\,\%$

Die Bank gewährt Herrn Müller eine Zins von $5{,}25\,\%$.

b) Herr Maier:

$K_n = 9978{,}50$

$9978{,}50 = 9000 \cdot 1{,}035^n \quad | \quad :9000$

$1{,}108722222 = 1{,}035^n \quad | \quad log$

$log(1{,}108722222) = n \cdot log\,(1{,}035) \quad | \quad :log\,(1{,}075)$

$n = 3$

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 9000 \cdot 1{,}035 = 9315{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}035 = 9641{,}03$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}075 \approx 9978{,}50$

Herr Maier ließ sein Geld nur 3 *Jahre lang auf der Bank.*

c) Herr Schulze:

$K_{12} = 9000 \cdot 1{,}08^{12} = 22663{,}53$

Herr Schulze bekommt im Jahre 2012 22 663,53 € *ausgezahlt.*

d) $2 = 1{,}08^n \quad | \quad log$

$log(2) = n \cdot log\,(1{,}08) \quad | \quad :log\,(1{,}08)$

$n = 9$

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 1{,}08^1 = 1{,}08$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}08 = 1{,}1664$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}08 = 1{,}259712$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}08 = \cdots.$

... weiter bis

$K_8 = K_7 \cdot 1{,}08 = 1{,}85093021$

$K_9 = K_8 \cdot 1{,}08 = 2$

Das Startkapital von Herrn Schulze verdoppelt sich zum Ende des Jahres 2009.

Lösung A7

a) $K_0 = 3000;\ \ n = 11;\ \ p\% = 7{,}2\,\%$

$K_{11} = 3000 \cdot 1{,}072^{11} = 6445{,}61$

An seinem 25. *Geburtstag kann der Neffe über* 6 445,61 € *verfügen.*

b) $K_{11} = 10000;\ \ n = 11;\ \ p\% = 7{,}2\,\%$

$10000 = K_0 \cdot 1{,}072^{11} \quad | \quad :1{,}072^{11}$

$K_0 = 4654{,}33$

Der Onkel 4 654,33 € *müsste anlegen.*

c) $K_0 = 3000 + 375;\ \ K_n = 10000;\ \ p\% = 7{,}2\,\%$

$10000 = 3375 \cdot 1{,}072^n \quad | \quad :3375$

$2{,}962962963 = 1{,}072^n \quad | \quad log$

$log(2{,}962962963) = n \cdot log\,(1{,}072) \quad | \quad :log\,(1{,}072)$

$n = 15{,}62277119$

Umrechnung von 0,62277119 Jahren in Tage:

$0{,}6228 \cdot 360 = 224{,}21 \approx 225$ Tage.

225 Tage = 7 Monate und 15 Tage.

Der Neffe muss das Geld 15 *Jahre,* 7 *Monate und* 15 *Tage liegen lassen.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 3375 \cdot 1{,}072 = 3618{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}072 = 3878{,}50$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}072 = 4157{,}75$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}072 = \cdots.$

... weiter bis

$K_{14} = K_{13} \cdot 1{,}08 = 8933{,}07$
$K_{15} = K_{14} \cdot 1{,}08 = 9576{,}25$
$10000 - 9576{,}25 = 423{,}75$
$Z = \frac{9576{,}25 \cdot t \cdot 7{,}2}{100} = 423{,}75$
$423{,}75 = 689{,}49 \cdot t \quad | \quad : 689{,}49$
$t_J = 0{,}614584693 \quad | \quad \cdot 12$
$t_M = 7{,}375016316 \quad | \quad \cdot 30$
$t_T = 221{,}25 \approx 222$
Der Neffe muss das Geld 15 *Jahre,* 7 *Monate und* 12 *Tage liegen lassen.*

d) $K_0 = 3375;\ K_n = 10000;\ \ n = 11$
$10000 = 3375 \cdot q^{11} \quad | \quad : 3375$
$q^{11} = 2{,}962962963 \quad | \quad \sqrt[11]{\ }$
$q = 1{,}104$
$p\,\% = (1{,}104 - 1) \cdot 100 = 10{,}4\,\%$
Der Zinssatz müsste $10{,}4\,\%$ *betragen.*

e) Am Anfang sind es 5 €.
Zum nächsten Geburtstage sind es 10 €.
Zum nächsten Geburtstage sind es 20 €.
Zum n- n-ten Geburtstage sind es $5 \cdot 2^n$ €.
Dies wiederholt sich $n = 9$ mal. (5. Geburtstag bis 14. Geburstag).
$K_9 = 5 \cdot 2^9 = 5 \cdot 1024 = 5120.$
Die Schwester erhält bis zu ihrer Konfirmation $5\,120$ €.

Lösung A8

$K_0 = 10000;\ \ p\% = 7{,}5\,\%$

a) $n = 6$
$K_6 = 10000 \cdot 1{,}075^6 = 15433{,}02$
Das Kapital steigt auf $15\,433{,}02$ € *an.*

b) Verdoppelung des Guthabens:
$2 = 1{,}075^n \quad | \quad log$
$log(2) = n \cdot log\,(1{,}075) \quad | \quad : log\,(1{,}075)$
$n = 9{,}6$
Umrechnung von $0{,}6$ Jahren in Tage:
$0{,}6 \cdot 360 = 216$ Tage.
216 Tage = 7 Monate und 6 Tage.
Das Guthaben verdoppelt sich in 9 *Jahren,* 7 *Monaten und* 6 *Tagen.*

c) $K_{10} = 18335{,}36$
$18335{,}36 = 10000 \cdot q^{10} \quad | \quad : 10000$
$q^{10} = 1{,}833536 \quad | \quad \sqrt[10]{\ }$
$q = 1{,}0625$
$p\,\% = (1{,}0625 - 1) \cdot 100 = 6{,}25\,\%$
Der Zinssatz hätte $6{,}25\,\%$ *betragen müssen.*

d) $K_8 = 12500;\ \ n = 8;\ \ p\% = 6{,}5\,\%$
$12500 = K_0 \cdot 1{,}065^8 \quad | \quad : 1{,}065^8$
$K_0 = 7552{,}89$
Man müsste $7\,552{,}89$ € *anlegen.*

Aufgabe A9

a) Herr Schmitz möchte seinem Sohn Michael bei Volljährigkeit (18 Jahre) 20 000 € für die Finanzierung seiner Ausbildung zur Verfügung stellen.
Welchen Betrag muss der Vater bei der Geburt seines Sohnes bei der Bank einzahlen, wenn diese ihm 3,5 % Zinsen gewährt?

b) Zu seinem 18. Geburtstag bekommt Michael von seiner Tante noch einmal 20 000 €. Er legt nun den Gesamtbetrag bei einer anderen Bank zu 4 % Zinsen an. Die jährlich anfallenden Zinsen plant er, als Taschengeld zu verbrauchen.
Über welches monatliche Taschengeld kann Michael verfügen?

c) Einige Jahre später hebt Michael vom Konto 24 000 € ab, um sich davon einen Kleinwagen zu kaufen. Zum Ausgleich belässt er die Zinsen nun auf dem Konto. Wie viele Jahre dauert es, bis der Kontostand wieder 20 000 € erreicht hat?

e) Michael fährt seinen Kleinwagen 6 Jahre und verkauft ihn dann für 11 000 €. Berechne den jährlichen prozentualen Verlust.

Aufgabe A10

An ihrem 10. Geburtstag bekommt Melanie von ihrer Erbtante 5 000 € geschenkt. Wenn sie das Geld nicht verbraucht, soll sie an ihrem 15. Geburtstag noch einmal 5 000 € bekommen. Wenn sie das Geld wieder nicht anrührt erhält sie bis zu ihrer Volljährigkeit mit 18 Jahren den gleichen Betrag, der sich bis dahin auf ihrem Sparbuch angesammelt hat.

a) Melanies Hausbank gewährt für die ganze Zeit einen Zinssatz von 4,3 %. Eine Privatbank würde Melanie für die erste Summe 3,7 % Zinsen gewähren und für das Geld, das sie ab dem 15. Lebensjahr auf ihrem Konto hat, 4,75 %.
Welches Angebot wird Melanie annehmen?

b) Melanies Vater könnte das Geld zum 10. und 15. Geburtstag gut für Investitionen in seiner Firma gebrauchen. Die Erbtante ist daraufhin bereit, 7 000 € sofort auszuzahlen, wenn Katja zu ihrem 18. Geburtstag von ihrem Vater den doppelten Betrag erhält. Mit welchem Zinssatz muss Melanies Vater rechnen?

c) Die Tante bietet Melanie auch an, ihr 8 000 € sofort auszuzahlen und das Ersparte zu verdoppeln, wenn die ursprüngliche Summe den $1\frac{1}{2}$-fachen Wert erreicht hat. Wann wäre das bei dem Zinssatz der Hausbank der Fall?

Aufgabe A11

Zum Aufbau einer Werkstatt nimmt ein Jungunternehmer ein Darlehen bei der Bank in Höhe von 250 000 € auf, das er je nach Ertragslage tilgen kann. Das Darlehen wird mit 4,6 % verzinst. Nach 6 Jahren zahlt er 200 000 € zurück. Nach weiteren 4 Jahren kann er 120 000 € tilgen.
Wie hoch ist seine Restschuld?

Aufgabe A12

Klaus hat vor 8 Jahren 16 500 € geerbt und dieses Erbe zu 5,2 % fest angelegt.

a) Über welchen Betrag kann er heute verfügen?

b) Klaus möchte sein heutiges Kapital wieder anlegen und in 6 Jahren über 30 000 € verfügen. Welchen Zinssatz müsste die Bank gewähren?

c) Klaus' Bruder Martin will nach 6 Jahren über den gleichen Betrag verfügen. Er vereinbart mit der Bank den gleichen Zinssatz wie sein Bruder Klaus und gleiche jährliche Einmalzahlungen am Anfang jeden Jahres. Welchen Betrag muss Jan am Anfang eines jeden Jahres einzahlen?

d) Klaus möchte wissen, wie lange es dauert, bis sich sein heutiges Kapital verdoppelt, sollte die Bank einen Zinssatz von 4,85 % gewähren.

Aufgabe A13

a) Herr Nansen möchte seinem Nachbarn ein 6 Jahre altes Wohnmobil für 25 000 € abkaufen. Wie hoch war der Neupreis, wenn man mit einem jährlichen durchschnittlichen Wertverlust von 11,5 % rechnen muss?

b) Wie hoch ist der jährliche Wertverlust einer Maschine, deren Wert innerhalb von 8 Jahren auf ein Achtel ihres Anfangswertes gesunken ist?

c) Herr Nansen besitzt das Bild eines berühmten Malers. In wie vielen Jahren steigt der Wert dieses Bildes von 35 000 € auf 400 000 € bei einer angenommenen Wertsteigerung von 15 %?

Aufgabe A14

Svenja hat vor 6 Jahren im Lotto gewonnen und von dem Gewinn 17 540 € für Anschaffungen ausgegeben, den Rest allerdings zu 3,8 % fest angelegt. Heute kann sie über 91 132,50 € verfügen.

a) Welchen Betrag hatte sie vor 6 Jahren gewonnen?

b) Über welchen Betrag hätte Svenja heute verfügen können, wenn sie vor 6 Jahren den gesamten Gewinn zu gleichen Bedingungen angelegt hätte?

c) Wie lange muss sie noch warten, bis ihr heutiges Kapital bei einem Zinssatz von 5,25 % auf 120 000 € angewachsen ist?

d) Bei welchem Zinssatz würde sich ihr heutiges Kapital in 10 Jahren verdoppeln?

Aufgabe A15

Um sich in acht Jahren ein Haus bauen zu können, legt ein Ehepaar seine Ersparnisse von 17 200 € zu 5,5 % Zinseszins bei einer Bank an. Nach drei Jahren zahlt es auf dasselbe Konto noch einmal 8 800 € ein und vereinbart einen neuen Zinssatz von 6 % jährlich. Am Schluss legt es noch einmal 1 200 € dazu.

a) Wie viel Geld liegt dann auf dem Konto?

b) Wie viel Prozent der Bausumme von 300 000 € kann es dann für das Haus anzahlen?

c) Wie viel Geld hätte das Ehepaar gehabt, wenn es stattdessen 8 Jahre lang zu Beginn eines Jahres 4 000 € in einen Ratensparvertrag eingezahlt hätte – 5,3% vorausgesetzt. Wie viel Prozent der Bausumme hätten sie in diesem Fall anzahlen können?

Aufgabe A16

Ein Vater möchte die spätere Ausbildung seiner Tochter finanziell absichern.

a) Welchen Betrag muss er auf die Sparkasse bringen, damit ihr bei einem jährlichen Zinssatz von $5{,}5\,\%$ nach 18 Jahren $30\,000\,€$ zur Verfügung stehen?

b) Ein anderes Geldinstitut bietet dem Vater an, bei einer Einzahlung von $10\,510\,€$ nach 18 Jahren $30\,000\,€$ auszuzahlen. Mit welchem Zinssatz rechnet das Institut?

c) Welcher Betrag würde der Tochter nach 18 Jahren zur Verfügung stehen, wenn der Vater bei einem Zinssatz von $5{,}2\,\%$ **nacheinander** folgende Einzahlungen vornehmen würde:

heute:	$3\,000\,€$
in 4 Jahren:	$3\,000\,€$
in 8 Jahren:	$3\,000\,€$
in 12 Jahren:	$3\,000\,€$

Lösung A9

a) $K_{18} = 20000;\ \ n = 18;\ \ p\,\% = 3{,}5\,\%$

$20000 = K_0 \cdot 1{,}035^{18} \qquad | \quad : 1{,}035^{18}$

$K_0 = 10767{,}22$

Herr Schmitz muss $10\,767{,}22$ € *einzahlen.*

b) $K_0 = 20000 + 20000 = 40000$

$K_1 = 40000 \cdot 1{,}04 = 41600$

$Z_1 = K_1 - K_0 = 41600 - 40000 = 1600$

Michael kann pro Jahr über $1\,600$ € *Taschengeld verfügen. Das sind monatlich* $133{,}33$ €.

c) Da Michael ja die jährlichen Zinsen verbraucht, hat er nach Abhebung der $24\,000$ € noch ein Anfangskapital von $K_0 = 40000 - 24000 = 16000$, welches nun wieder auf $20\,000$ € anwachsen soll.

$20000 = 16000 \cdot 1{,}04^n \qquad | \quad : 16000$

$1{,}25 = 1{,}04^n \qquad | \quad log$

$log(1{,}25) = n \cdot log(1{,}04) \qquad | \quad : log(1{,}04)$

$n = 5{,}68$

Im $6.$ *Jahr ist das Ursprungskapital wieder verfügbar.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 16000 \cdot 1{,}04 = 16640{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}04 = 17305{,}60$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}04 = 17997{,}82$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}04 = 18717{,}74$

$K_5 = K_4 \cdot 1{,}04 = 19466{,}45$

$K_6 = K_5 \cdot 1{,}04 = 20245{,}10$

d) $K_0 = 24000;\ \ K_6 = 11000;\ \ n = 6$

$11000 = 24000 \cdot q^6 \qquad | \quad : 24000$

$q^6 = 0{,}458333333 \qquad | \quad \sqrt[6]{\ }$

$q = 0{,}8781$

$p\,\% = (1 - 0{,}8781) \cdot 100 \approx 12{,}2\,\%$

Der jährliche Wertverlust liegt bei $12{,}2\,\%$.

Lösung A10

$K_0 = 5000;\ \ n = 5$; danach Zuzahlung von 5000 und weitere Verzinsung mit $n = 3$ zu $p\,\% = 4{,}3\,\%$ (Bank A).

a) Bank A:

$K_8 = (5000 \cdot 1{,}043^5 + 5000) \cdot 1{,}043^3 = 12675{,}49$

Bank B:

$K_8 = (5000 \cdot 1{,}037^5 + 5000) \cdot 1{,}0475^3 = 12638{,}57$

Melanie wird sich für Bank A entscheiden.

b) $K_8 = 14000;\ \ K_0 = 7000;\ \ n = 8$

$14000 = 7000 \cdot q^8 \qquad | \quad : 7000$

$q^8 = 2 \qquad | \quad \sqrt[8]{\ }$

$q = 1{,}0905$

$p\,\% = (1{,}0905 - 1) \cdot 100 \approx 9{,}1\,\%$

Melanie Vater muss mit einer Verzinsung von $9{,}1\,\%$ *rechnen.*

c) $K_n = 12000;\ K_0 = 8000;\ p\,\% = 4{,}3\,\%$

$12000 = 8000 \cdot 1{,}043^n \quad | \quad :8000$

$1{,}5 = 1{,}043^n \quad | \quad log$

$log(1{,}5) = n \cdot log(1{,}043) \quad | \quad :log(1{,}043)$

$n = 9{,}68$

Im $10.$ *Jahr ist das* $1\,\frac{1}{2}$-fache *der ursprünglichen Summe erreicht.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 8000 \cdot 1{,}043 = 8344{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}043 = 8702{,}79$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}043 = 9077{,}01$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}043 \ldots$

… usw. bis

$K_9 = K_8 \cdot 1{,}04 = 11685{,}54$

$K_{10} = K_9 \cdot 1{,}04 = 12188{,}02$

Lösung A11

$K_0 = 250000;\quad n = 10;\quad p\,\% = 4{,}6\,\%$; Tilgung nach 6 Jahren 200000 und nach weiteren 4 Jahren 120000.

$K_{10} = (250000 \cdot 1{,}046^6 - 200000) \cdot 1{,}046^4 - 120000 = 32555{,}67$

Die Restschuld nach 10 *Jahren beträgt* $32\,555{,}67$ €.

Lösung A12

$K_0 = 16500;\quad n = 8;\quad p\,\% = 5{,}2\,\%$

a) $K_8 = 16500 \cdot 1{,}052^8 = 24751{,}98$

Klaus kann über $24\,751{,}98$ € *verfügen.*

b) $K_6 = 30000;\ K_0 = 24751{,}98;\ n = 6$

$30000 = 24751{,}98 \cdot q^6 \quad | \quad :24751{,}98$

$q^6 = 1{,}21202425 \quad | \quad \sqrt[6]{\ }$

$q = 1{,}0326$

$p\,\% = (1{,}0326 - 1) \cdot 100 = 3{,}26\,\%$

Die Bank muss einen zins in Höhe von $3{,}26\,\%$ *gewähren.*

c) Aufgabe zur Ratenzahlung

$K_6 = 30000;\ n = 6;\ p\,\% = 3{,}26\,\%$

$30000 = R \cdot (1{,}0326^6 + 1{,}0326^5 + 1{,}0326^4 + 1{,}0326^3 + 1{,}0326^2 + 1{,}0326)$

$30000 = R \cdot 6{,}723033187 \quad | \quad :6{,}723033187$

$R = 4462{,}27$

Klaus' Bruder muss jährliche Raten von $4\,462{,}27$ € einzahlen.

d) Verdoppelung des Kapitals von Klaus:

$2 = 1{,}0485^n \quad | \quad log$

$log\,2 = n \cdot log(1{,}0485) \quad | \quad :log(1{,}0485)$

$n = 14{,}63$

Klaus' Kapital wird sich im $15.$ *Jahr verdoppeln.*

Lösung A13

a) $K_6 = 25000;\quad n = 6\,J;\quad p\,\% = 11{,}5\,\%$ Wertverlust.

Hinweis: Wegen „Wertverlust" ist mit $100\,\% - 11{,}5\,\% = 88{,}5\,\%$ zu rechnen.

$25000 = K_0 \cdot 0{,}885^6 \quad | \quad : 0{,}885^6$

$K_0 = 52033{,}18$

Der Neupreis des Wohnmobils lag bei etwa $52\,033$ *€.*

b) $\frac{1}{8} = q^8 \quad | \quad \sqrt[8]{}$

$q = 0{,}7711$

$p\,\% = (1 - 0{,}7711) \cdot 100 = 22{,}9\,\%$

Der jährliche Wertverlust liegt bei $22{,}9\,\%$.

c) $400000 = 35000 \cdot 1{,}15^n \quad | \quad : 35000$

$11{,}42857143 = 1{,}15^n \quad | \quad log$

$log(11{,}42857143) = n \cdot log(1{,}15) \quad | \quad : log(1{,}15)$

$n = 17{,}43$

Im $18.$ *Jahr hat das Kunstwerk einen Wert von* $400\,000$ *€.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 35000 \cdot 1{,}15 = 40250{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}15 = 46287{,}50$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}15 = 53230{,}63$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}15 \ldots$

… usw. bis

$K_{17} = K_{16} \cdot 1{,}15 = 376644{,}24$

$K_{18} = K_{17} \cdot 1{,}15 = 433140{,}87$

Lösung A14

a) $K_6 = 91132{,}50;\quad n = 6;\quad p\,\% = 3{,}8\,\%$

$91132{,}50 = K_0 \cdot 1{,}038^6 \quad | \quad : 1{,}038^6$

$K_0 = 72860$

Lottogewinn:

$G = K_0 + 17540 = 72860 + 17540 = 90400$

Svenja hatte vor 6 *Jahren* $90\,400$ *€ gewonnen.*

b) $K_6 = 90400 \cdot 1{,}038^6 = 113071{,}34$

Svenja hätte über $113\,071{,}34$ *€ verfügen können.*

c) $120000 = 91132{,}50 \cdot 1{,}038^n \quad | \quad : 91132{,}50$

$1{,}316764052 = 1{,}038^n \quad | \quad log$

$log(1{,}316764052) = n \cdot log(1{,}038) \quad | \quad : log(1{,}038)$

$n = 7{,}38$

Svenja muss 8 *Jahre warten.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 91132{,}50 \cdot 1{,}038 = 94595{,}54$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}038 = 98190{,}17$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}038 = 101921{,}39$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}038 \ldots$

… usw. bis

$K_7 = K_6 \cdot 1{,}038 = 118319{,}07$

$K_8 = K_7 \cdot 1{,}038 = 122815{,}20$

d) $2 = q^{10} \quad | \quad \sqrt[10]{}$

$q = 1{,}072$

$p\,\% = (1{,}072 - 1) \cdot 100 = 7{,}2\,\%$

Svenjas Kapital verdoppelt sich in 10 *Jahren bei einem Zins von* $7{,}2\,\%$.

Lösung A15

$K_0 = 17200;\ \ n = 3;\ \ p\% = 5{,}5\ \%$ nach 3 Jahren Zuzahlung von $8800;\ \ n = 5;\ \ p\% = 5\%$, am Ende dann Zuzahlung von 1200.

a) $K_8 = (17200 \cdot 1{,}055^3 + 8800) \cdot 1{,}05^5 + 1200$
$K_8 = 38208{,}27$
Nach 8 Jahren liegen $38\,208{,}27$ € auf dem Konto.

b) $p_{Anz}\% = \frac{38208{,}27}{300000} \cdot 100 = 12{,}74\ \%$
Das Ehepaar kann $12{,}74\ \%$ der Bausumme anzahlen.

c) Ratensparvertrag:
$K_8 = 4000 \cdot (1{,}053^8 + 1{,}053^7 + 1{,}053^6 + 1{,}053^5 + 1{,}053^4 + 1{,}053^3 + 1{,}053^2 + 1{,}053)$
$K_8 = 35984{,}68$
Das Ehepaar hätte in diesem Falle $35\,984{,}68$ € auf dem Konto gehabt.
$p_{Anz}\% = \frac{35984{,}68}{300000} \cdot 100 = 12\ \%$
Das wären $12\ \%$ der Bausumme gewesen.

Lösung A16

a) $K_{18} = 30000;\ \ p\% = 5{,}5\ \%;\ \ n = 18$
$30000 = K_0 \cdot 1{,}055^{18} \quad | \quad : 1{,}055^{18}$
$K_0 = 11443{,}98$
Das Vater muss $11\,443{,}98$ € zur Bank bringen.

b) $30000 = 10510 \cdot q^{18} \quad | \quad : 10510$
$q^{18} = 2{,}854424358 \quad | \quad \sqrt[18]{\ }$
$q = 1{,}06$
$p\ \% = (1{,}06 - 1) \cdot 100 = 6\ \%$
Das Institut rechnet mit $6\ \%$.

c) $K_{18} = (((3000 \cdot 1{,}052^4 + 3000) \cdot 1{,}052^4 + 3000) \cdot 1{,}052^4 + 3000) \cdot 1{,}052^6$
$K_{18} = 22618{,}63$
Der Tochter würden $22\,618{,}63$ € zur Verfügung stehen.

Aufgabe A17

Eine Spareinlage von $7\,500$ € wird in den ersten vier Jahren mit jährlich $4{,}5$ % verzinst. Zu Beginn des $5.$ Jahres erhöht sich der Zinssatz auf $5{,}5$ %.

a) Auf welchen Betrag ist das Kapital nach Ablauf von 10 Jahren angewachsen?

b) Wie lange müsste die Spareinlage stehen bleiben, wenn bei unveränderter Anfangsverzinsung von $4{,}5$ % das gleiche Endkapital erwirtschaftet werden soll?

c) Zu welchem Zinssatz müsste die Spareinlage angelegt werden, damit nach 12 Jahren $15\,000$ € zur Verfügung stehen?

Aufgabe A18

Der Kauf eines Autos soll zu 60 % mit einem tilgungsfreien Darlehen durch eine Bank finanziert werden. Der Kaufpreis des Autos beträgt $26\,000$ €, das Darlehen soll nach 2 Jahren zurückgezahlt werden. Es liegen folgende Angebote vor:

- Bank A mit $0{,}9$ % Zinsen im Monat
- Bank B mit $10{,}8$ % Zinsen im Jahr
- Bank C mit $2{,}6$ % im Vierteljahr.

a) Welches Angebot ist am günstigsten?

b) Wie hoch wäre der Zinssatz einer Bank D, die in 2 Jahren insgesamt $4\,000$ € Zinsen verlangt?

Aufgabe A19

Katja hat zur Konfirmation $2\,500$ € erhalten. Sie will ihr Geld anlegen und hat folgende Möglichkeiten zur Auswahl:

a) Sie kann das Geld langfristig bei einer Sparkasse anlegen. Nach wie vielen Jahren hätte sie doppelt so viel Geld auf dem Konto, wenn der Zinssatz $p\,\% = 6{,}5\,\%$ beträgt?

b) Sie würde gerne in 5 Jahren 50 % mehr als $2\,500$ € haben. Zu welchem Zinssatz müsste sie das Geld anlegen?

c) Katjas Vater ist sofort bereit, ihre $2\,500$ € soweit aufzustocken, damit sie nach 5 Jahren bei einem Zinssatz von $5{,}5$ % einschließlich Zinsen $6\,000$ € zur Verfügung hat. Wie viel muss der Vater seiner Tochter geben?

Aufgabe A20

Zum $10.$ Geburtstag erhält Olaf ein Sparbuch mit $1\,000$ €; Zinssatz ist $4{,}8$ % bei jährlicher Verzinsung.

a) Wann ist das Guthaben auf das Doppelte angewachsen?

b) Wie viel muss Olaf dazuzahlen, wenn er sich zu seinem $18.$ Geburtstag einen Computer für $2\,490$ € kaufen will?

c) Wie hoch hätte der Zinssatz sein müssen, damit er sich einen gleich teuren Computer an seinem $21.$ Geburtstag ohne Zuzahlung hätte kaufen können?

d) Wie groß hätte das Guthaben zum $10.$ Geburtstag sein müssen, wenn er beim Zinssatz von $4{,}8$ % ohne Zuzahlung am $21.$ Geburtstag diesen Computer hätte kaufen wollen?

Aufgabe A21

Ein Handwerker möchte sich selbstständig machen, wobei ihn die Bank mit einem Ratensparvertrag zu 6,5 % unterstützt.

a) Welchen Betrag muss er jeweils am Jahresanfang bei der Bank bezahlen, um nach einer zehnjährigen Laufzeit 100 000 € zu erhalten?

b) In welchem Jahr übersteigt sein Vermögen 60 000 €?

Aufgabe A22

Ein Kapital wurde vor 5 Jahren zu 5,9 % Zinseszins auf einem Sparkonto festgelegt. Es ist bis zum heutigen Zeitpunkt auf einen Betrag von 19 978,88 € angewachsen.

a) Welchen Betrag hatte die ursprüngliche Spareinlage?

b) Berechne das Endkapital nach einer Laufzeit von 12 Jahren.

c) Nach wie vielen Jahren würde sich das ursprüngliche Kapital verdreifachen?

d) Wie hoch müsste der Zinssatz sein, damit sich das Kapital bereits nach 17 Jahren verdreifacht?

Aufgabe A23

Frau Peters möchte ihr Haus verkaufen.

a) Welches Kaufangebot ist für sie am günstigsten, wenn man mit 6,25 % Zinseszins rechnet?
A will sofort 389 000 € zahlen
B will 445 000 € nach 5 Jahren zahlen.
C will nach drei Jahren 225 000 € und nach 6 Jahren nochmals 225 000 € zahlen.

b) Wie viel Prozent betrug die durchschnittliche Wertsteigerung eines Hauses, das vor 15 Jahren für 235 000 € gekauft wurde und heute für 375 000 € verkauft wird?

Aufgabe A24

Auf einem Sparkonto werden 76 000 € mit 7 % Zinseszins festgelegt.

a) Wie hoch ist das Endkapital nach 6 Jahren?

b) In welcher Zeit wächst das Kapital von 76 000 € auf 130 582,15 € an?

c) Wie hoch müsste der Zinssatz sein, damit sich das Kapital von 76 000 € in 9 Jahren verdoppelt?

Lösung A17

a) $K_0 = 7500;\ \ n = 10;\ \ p\,\% = 4{,}5\,\%$ anfänglich, ab $6.$ Jahr $p\,\% = 5{,}5\,\%$

$K_{10} = 7500 \cdot 1{,}045^5 \cdot 1{,}055^5 = 12215{,}32$

Nach 10 *Jahren beträgt das Kapital* $12\,215{,}32$ €.

b) $K_n = K_0 \cdot 1{,}04^n$

$12215{,}32 = 7500 \cdot 1{,}04^n \quad | \quad :7500$

$1{,}628709953 = 1{,}045^n \quad | \quad log$

$log(1{,}628709953) = n \cdot log(1{,}045) \quad | \quad :log(1{,}045)$

$n = 11{,}08$

Das Anfangskapital muss etwa 11 *Jahre liegen bleiben.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 7500 \cdot 1{,}045 = 7837{,}50$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}045 = 8190{,}19$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}045 = 8558{,}75$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}045 \ldots$

… weiter bis

$K_{10} = K_9 \cdot 1{,}045 = 11647{,}27$

$K_{11} = K_{10} \cdot 1{,}045 = 12171{,}40$

c) $K_0 = 7500;\ \ K_{12} = 15000;\ \ n = 12$

$15000 = 7500 \cdot q^{12} \quad | \quad :7500$

$q^{12} = 2 \quad | \quad \sqrt[12]{\ }$

$q = 1{,}059$

$p\,\% = (1{,}059 - 1) \cdot 100 = 5{,}9\,\%$

Der Zinssatz müsste $5{,}9\,\%$ *betragen.*

Lösung A18

a) Berechnung des günstigsten Angebotes:

$K_0 = 26000 \cdot 0{,}6 = 15600$; gesucht: K_n der günstigsten Bank.

Bank A: Abzahlungsdarlehen mit $0{,}9\,\%$ /Monat

$0{,}9\% \cdot 24 = 21{,}6\,\%$

$K_n = 15600 \cdot 1{,}216 = 18969{,}60$

Bei Bank A betrüge das Endkapital $18\,969{,}60$ €

Bank B: Finanzierungsdarlehen mit $10{,}8\,\%$ / Jahr

$K_n = K_0 \cdot q^2 = 15600 \cdot 1{,}108^2 = 19151{,}56$

Bei Bank B betrüge das Endkapital $19\,151{,}56$ €

Bank C: Finanzierungsdarlehen mit vierteljährlicher Zinsbildung mit $2{,}6\,\%$.

q bei vierteljährtlicher Zinsbildung

$q = \left(1 + \frac{p\,\%}{100} \cdot \frac{1}{4}\right) = 1{,}0065$

$K_n = K_0 \cdot q^8 = 15600 \cdot 1{,}0065^8 = 16429{,}90$

Bei Bank C betrüge das Endkapital $16\,429{,}90$ €

Bank C ist am günstigsten.

b) $K_0 = 15600;\ \ K_2 = 19600;\ \ n = 2$

$19600 = 15600 \cdot q^2 \quad | \quad :15600$

$q^2 = 1{,}256410256 \quad | \quad \sqrt[2]{\ }$

$q = 1{,}1209$

$p\,\% = (1{,}1209 - 1) \cdot 100 = 12{,}09\,\%$

Der Zinssatz von Bank D wäre etwa $12{,}1\,\%$.

Lösung A19

a) $K_0 = 2500;\ \ K_n = 5000;\ \ p\,\% = 6{,}5\,\%$

$2 = 1{,}065^n \qquad | \quad log$

$log(2) = n \cdot log(1{,}065) \qquad | \quad : log(1{,}065)$

$n = 11{,}007$

Katja hätte nach etwa 11 *Jahren* $5\,000$ € *auf ihrem Konto.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 2500 \cdot 1{,}065 = 2662{,}50$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}065 = 2835{,}56$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}065 = 3019{,}87$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}065 \ldots$

… weiter bis

$K_{10} = K_9 \cdot 1{,}065 = 4692{,}84$

$K_{11} = K_{10} \cdot 1{,}065 = 4997{,}88$

b) $K_5 = 3750;\ \ K_0 = 2500;\ \ n = 5$

$3750 = 2500 \cdot q^5 \qquad | \quad : 2500$

$q^5 = 1{,}5 \qquad | \quad \sqrt[5]{\ }$

$q = 1{,}059$

$p\,\% = (1{,}0845 - 1) \cdot 100 = 8{,}45\,\%$

Der Zinssatz müsste $8{,}45\,\%$ *betragen.*

c) $K_5 = 6000;\ \ n = 5;\ \ p\,\% = 5{,}5\,\%$

$6000 = K_0 \cdot 1{,}055^5 \qquad | \quad : 1{,}055^5$

$K_0 = 4590{,}80$

Aufstockung Vater:

$K_{Vater} = K_0 - 2500 = 4590{,}80 - 2500 = 2090{,}80$

Katjas Vater müsste ihre $2\,500{,}00$ € *um* $2\,090{,}80$ € *aufstocken.*

Lösung A20

a) $K_0 = 1000;\ \ K_n = 2000;\ \ p\,\% = 6{,}5\,\%$

$2 = 1{,}048^n \qquad | \quad log$

$log(2) = n \cdot log(1{,}048) \qquad | \quad : log(1{,}065)$

$n = 14{,}78$

Das Kapital ist im $15.$ *Jahr auf das Doppelte angestiegen.*

b) $K_{10} = 2490;\ \ K_0 = 1000 + Z;\ \ p\,\% = 6{,}5\,\%$

$2490 = (1000 + Z) \cdot 1{,}065^{10} \qquad | \quad \cdot 1{,}065^{10}$

$1326{,}49 = 1000 + Z \qquad | \quad -1000$

$Z = 326{,}49$

Olaf muss $326{,}49$ € *dazu zahlen.*

c) $2490 = 1000 \cdot q^{11} \qquad | \quad : 100$

$q^{11} = 2{,}49 \qquad | \quad \sqrt[11]{\ }$

$q = 1{,}0865$

$p\,\% = (1{,}0865 - 1) \cdot 100 = 8{,}65\,\%$

Der Zinssatz müsste $8{,}65\,\%$ *betragen.*

d) $2490 = K_0 \cdot 1{,}048^{11} \qquad | \quad : 1{,}048^{11}$

$K_0 = 1486{,}71$

Das Anfangskapital hätte $1\,486{,}71$ € *betragen müssen.*

Lösung A21

Aufgabe zum Ratensparvertrag

a) $K_{10} = 100000;\ \ n = 10;\ \ p\,\% = 6{,}5\,\%$

$K_{10} = R \cdot (1{,}065^{10} + 1{,}065^{8} + 1{,}065^{7} + 1{,}065^{6} + 1{,}065^{5} + 1{,}065^{4} + \cdots + 1{,}065)$

$100000 = R \cdot 14{,}3716 \qquad | \quad :14{,}3716$

$R = 6958{,}19$

Die jährliche Eiinzahlung muss 6 958,19 € *betragen.*

b) Verwendung der Rentenformel für vorschüssige Einzahlungen:

$K_n = \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

$60000 = \frac{6958{,}19 \cdot 1{,}065 \cdot (10{,}65^n - 1)}{0{,}065} = 114007{,}27 \cdot (1{,}065^n - 1)$

$\frac{60000}{114007{,}27} = 10{,}65^n\text{-}1$

$0{,}526282227 + 1 = 1{,}065^n \qquad | \quad log$

$log(1{,}526282227) = n \cdot log(1{,}065) \qquad | \quad : log(1{,}065)$

$n = 6{,}71$

Im 7. *Jahr sind* 60 000 € *auf dem Konto.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 6958{,}19 \cdot 1{,}065 = 7410{,}47$

$K_2 = 6958{,}19 \cdot (1{,}065^2 + 1{,}065) = 15302{,}63$

$K_3 = 6958{,}19 \cdot (1{,}065^3 + 1{,}065^2 + 1{,}065) = 23708{,}79$

$K_4 = 6958{,}19 \cdot (1{,}065^4 + 1{,}065^3 + 1{,}065^2 + 1{,}065) = 32660{,}65$

$K_5 = 6958{,}19 \cdot (1{,}065^5 + 1{,}065^4 + 1{,}065^3 + 1{,}065^2 + 1{,}065) = 42194{,}39$

$K_6 = 6958{,}19 \cdot (1{,}065^6 + 1{,}065^5 + 1{,}065^4 + 1{,}065^3 + 1{,}065^2 + 1{,}065) = 52347{,}82$

$K_7 = 6958{,}19 \cdot (1{,}065^7 + 1{,}065^6 + 1{,}065^5 + 1{,}065^4 + 1{,}065^3 + 1{,}065^2 + 1{,}065)$

$= 63161{,}22$

Lösung A22

a) $K_5 = 19978{,}88;\ \ n = 5;\ \ p\,\% = 5{,}9\,\%$

$19978{,}88 = K_0 \cdot 1{,}059^5 \qquad | \quad :1{,}059^5$

$K_0 = 15000{,}00$

Das Anfangskapital betrug 15 000 €.

b) $K_{12} = K_0 \cdot q^{12} = 15000 \cdot 1{,}059^{12} = 29843{,}02$

Das Endkapital nach 12 *Jahre neträgt* 29 843,02 €.

c) $3 = 1{,}059^n \qquad | \quad log$

$log(3) = n \cdot log(1{,}059) \qquad | \quad : log(1{,}045)$

$n = 19{,}16$

Das Anfangskapital verdreifacht sich im 20. *Jahr.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 15000 \cdot 1{,}059 = 15885{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}059 = 16822{,}22$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}059 = 17814{,}73$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}059 \ldots$

… weiter bis

$K_{19} = K_{15} \cdot 1{,}059 = 44577{,}38$

$K_{20} = K_{19} \cdot 1{,}059 = 47207{,}44$

d) $q^{17} = 3 \qquad | \quad \sqrt[17]{}$

$q = 1{,}0666$

$p\,\% = (1{,}0666 - 1) \cdot 100 = 6{,}66\,\%$

Der Zinssatz müsste 6,66 % *betragen.*

Lösung A23

a) Gesucht ist jeweils das Anfangskapital.

Anfangskapital A:

$K_{0_A} = 389000{,}00$

Anfangskapital B:

$K_5 = 445000{,}00;\ \ n = 5;\ \ p\% = 6{,}25\ \%$

$445000 = K_0 \cdot 1{,}0625^5 \qquad | \quad :1{,}0625^5$

$K_{0_B} = 328636{,}14$

Anfangskapital C:

$K_3 = 225000{,}00;\ \ n = 3;\ \ p\% = 6{,}25\ \%;\ \ K_6 = 225000{,}00;\ \ n = 6;\ \ p\ \% = 6{,}25\ \%$

$225000 = K_{0_1} \cdot 1{,}0625^3 \qquad | \quad :1{,}0625^3$

$K_{0_1} = 187583{,}96$

$225000 = K_{0_2} \cdot 1{,}0625^6 \qquad | \quad :1{,}0625^6$

$K_{0_2} = 156389{,}97$

$K_{0_C} = K_{0_1} + K_{0_2} = 187583{,}96 + 156389{,}97 = 343973{,}93$

Das Angebot von A ist für die Verkäuferin am günstigsten.

b) $375000 = 235000 \cdot q^{15} \qquad | \quad :235000$

$q^{15} = 1{,}595744681 \qquad | \quad \sqrt[15]{\ }$

$q = 1{,}03164$

$p\ \% = (1{,}03164 - 1) \cdot 100 = 3{,}16\ \%$

Die durchschnittliche Wertsteigerung betrug $3{,}16\ \%$ *pro Jahr.*

Lösung A24

$K_0 = 76000;\ \ n = 6;\ \ p\ \% = 7\ \%$

a) $K_6 = K_0 \cdot q^6 = 76000 \cdot 1{,}07^6 = 114055{,}51$

Das Kapital beträgt nach 6 *Jahre* $114\,055{,}51$ *€.*

b) $130582{,}15 = 76000 \cdot 1{,}07^n \qquad | \quad :76000$

$1{,}718186184 = 1{,}07^n \qquad | \quad log$

$log(1{,}718186184) = n \cdot log(1{,}07) \qquad | \quad :log(1{,}07)$

$n = 8$

Das Anfangskapital wächst in 8 *Jahren auf* $130\,582{,}15$ *an.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 76000 \cdot 1{,}07 = 81320{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}07 = 87012{,}40$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}07 = 93103{,}27$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}07 \ldots$

… weiter bis

$K_7 = K_6 \cdot 1{,}07 = 122039{,}39$

$K_8 = K_7 \cdot 1{,}07 = 130582{,}15$

c) $2 = q^9 \qquad | \quad \sqrt[9]{\ }$

$q = 1{,}08$

$p\ \% = (1{,}08 - 1) \cdot 100 = 8{,}0\ \%$

Der Zinssatz müsste $8\ \%$ *betragen.*

Aufgabe A25

Der Wertverlust für einen PKW beträgt durchschnittlich 11 % jährlich. Herr Mahagolu kauft sich jetzt einen neuen Wagen für 26 413 €. Gleichzeitig verkauft er sein kleines Zweitauto für 12 600 € und legt diesen Betrag zu 3,2% Zinsen an.
Sobald der angesparte Betrag genauso groß ist wie der spätere Erlös für den großen Wagen, will Herr Martens wieder ein neues Auto kaufen.

a) Wann wird Herr Martens sich ein neues Auto kaufen?
b) Wie viel Geld wird er dann zur Verfügung haben?

Aufgabe A26

Ein Auto hat bei der Anschaffung 37 500 € gekostet und wird nach 3 Jahren für 22 200 € verkauft.

a) Berechne die durchschnittliche jährliche Wertminderung in Prozent.
b) In wie vielen Jahren würden 22 200 € bei 8,25 % Zinseszinsen wieder auf 37 500 € anwachsen?

Aufgabe A27

Frau Papandreou macht eine Erbschaft von 70 000 €. Sie will das Geld 15 Jahre lang festlegen.

a) Eine Bank bietet für die ersten 10 Jahre 6 %, für die übrige Zeit 7,75 %. Frau Papandreou kauft nach 15 Jahren eine Wohnung zum Preis von 225 000 €. Wie viel Geld fehlt noch?
b) Für wie viele Jahre muss sie ihre Erbschaft bei einem Zinssatz von 6,5 % festlegen, um die Eigentumswohnung bar bezahlen zu können?
c) Mit welchem Zinssatz rechnet ein Geldinstitut, das nach Ablauf von 15 Jahren das Doppelte der Erbschaft an Frau Papandreou zurückzahlen will?

Aufgabe A28

Frau Hägendasz gewann 16 380 € im Lotto; sie legte dieses Geld 8 Jahre bei einer Bank fest. Während dieser Zeit wuchs ihr Lottogewinn durch Zinseszins um 13 200 €.

a) Welcher Zinssatz wurde von der Bank gewährt?
b) Welchen Betrag hätte Frau Hägendasz nach 4 Jahren zusätzlich einzahlen müssen, um nach 8 Jahren über 35 000 € verfügen zu können?
c) In welcher Zeit wäre ihr Lottogewinn bei 4,5 % Zinseszins auf das Doppelte angewachsen?

Aufgabe A29

Frau Schulze nimmt ein Darlehen über 70 000 € auf. Sie zahlt es in Jahresraten von 6 500 € zurück. Der Zinssatz beträgt 8,25 %.

a) Stelle für die ersten 4 Jahre einen Tilgungsplan auf.
b) Nach wie vielen Jahren ist die Schuld abgetragen?

Aufgabe A30

Familie Patschenkofen benötigt zur Finanzierung einer Eigentumswohnung $120\,000$ €. Die Bank bietet an: Auszahlungskurs $93{,}5$ %; Zinssatz $7{,}75$ %.

a) Wie hoch muss der tatsächlich aufzunehmende Betrag sein?

b) Berechne die jährliche Tilgungsrate, wenn das Geld nach 15 Jahren zurückgezahlt sein soll.

c) Stelle einen Tilgungsplan für die ersten 4 Jahre auf.

Aufgabe A31

Ein Sparguthaben in Höhe von $12\,600$ € steht 4 Jahre zu $7{,}75$ % auf Zinseszins. Dann wird die Hälfte des Kapitals abgehoben und der Restbetrag zu jährlich 6 % erneut festgelegt.

a) Nach wie vielen Jahren ist der Restbetrag wieder auf $12\,600$ € angewachsen?

b) Zu welchem Zinssatz müsste das ursprüngliche Sparguthaben angelegt werden, damit es sich in 20 Jahren verdreifacht?

Aufgabe A32

a) Ein Geschäftsmann benötigt dringend Geld. Deshalb verkauft er ein sechs Jahre zuvor für $350\,000$ € erworbenes Aktienpaket an der Börse. Allerdings erhält er derzeit nur $275\,000$ € dafür. Berechne die durchschnittliche Wertminderung in Prozent.

b) Ein anderer Geschäftsmann hat noch mehr Pech. Sein Aktienpaket im Werte von $420\,000$ € hat zuletzt nur noch $\frac{4}{7}$ des ursprünglichen Wertes. Vor wie vielen Jahren kaufte er sein Aktienpaket, wenn die durchschnittliche Wertminderung bei $6{,}76$ % lag?

c) Ein weiterer Geschäftsmann hat dagegen Glück. Der Wert seines Aktienpaketes vervierfachte sich. Nach wie vielen Jahren war dies der Fall, wenn der durchschnittliche jährliche Wertzuwachs $21{,}905$ % beträgt?

Lösung A25

a) Wertverlust $11\,\%$ pro Jahr bedeutet einen verbleibenden Wert von $89\,\%$.
Nach Aufgabentext soll gelten:

$K_{n_{Wagen}} = 26413 \cdot 0{,}89^n;\;\; K_{n_{Verkauf}} = 12600 \cdot 1{,}032^n$

$K_{n_{Wagen}} = K_{n_{Verkauf}}$

$26413 \cdot 0{,}89^n = 12600 \cdot 1{,}032^n \qquad | \qquad :12600;\;\; :0{,}89^n$

$\frac{26413}{12600} = \frac{1{,}032^n}{0{,}89^n}$

$2{,}096299841 = 1{,}1595505862^n \qquad | \qquad log$

$log(2{,}096299841) = n \cdot log(1{,}1595505862)$

$| \qquad :log(1{,}1595505862)$

$n = 5$

Herr Martens wird sich nach 5 *Jahren ein neues Auto kaufen.*

Ohne Logarithmus:

$K_{1_{Wagen}} = 26413 \cdot 0{,}89 = 23507{,}57$

$K_{1_{Verkauf}} = 12600 \cdot 1{,}032 = 13003{,}20$

$K_{2_{Wagen}} = K_{1_{Wagen}} \cdot 0{,}89 = 20921{,}73$

$K_{2_{Verkauf}} = K_{1_{Verkauf}} \cdot 1{,}032 = 13419{,}30$

$K_{3_{Wagen}} = K_{2_{Wagen}} \cdot 0{,}89 = 18620{,}35$

$K_{3_{Verkauf}} = K_{2_{Verkauf}} \cdot 1{,}032 = 13848{,}72$

$K_{4_{Wagen}} = K_{3_{Wagen}} \cdot 0{,}89 = 16527{,}11$

$K_{4_{Verkauf}} = K_{3_{Verkauf}} \cdot 1{,}032 = 14291{,}88$

$K_{5_{Wagen}} = K_{4_{Wagen}} \cdot 0{,}89 = 14749{,}18$

$K_{5_{Verkauf}} = K_{4_{Verkauf}} \cdot 1{,}032 = 14749{,}22$

b) $K_{ges} = K_{5_{Wagen}} + K_{5_{Verkauf}} = 14749{,}18 + 14749{,}22 = 29498{,}40$

Herrn Martens stehen dann $29\,498{,}40\,€$ *zur Verfügung.*

Lösung A26

a) $K_0 = 37500;\;\; K_3 = 22000;\;\; n = 3$

$22000 = 37500 \cdot q^3 \qquad | \qquad :37500$

$q^3 = 0{,}586666667 \qquad | \qquad \sqrt[3]{}$

$q = 0{,}8371$

$p\,\% = (1 - 0{,}8371) \cdot 100 \approx 16{,}3\,\%$

Der Wertverlust pro Jahr beträgt etwa $16{,}3\,\%$.

b) $37500 = 22000 \cdot 1{,}0825^n \qquad | \qquad :22000$

$1{,}704545455 = 1{,}0825^n \qquad | \qquad log$

$log(1{,}704545455) = n \cdot log(1{,}0825) \qquad | \qquad :log(1{,}0825)$

$n = 6{,}72$

Im $7.$ *Jahr sind wieder* $37\,500\,€$ *auf dem Konto.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 22000 \cdot 1{,}0825 = 23815{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}0825 = 25779{,}74$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}0825 = 27906{,}57$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}0825 = \cdots$

... usw. bis

$K_6 = K_5 \cdot 1{,}0825 = 35398{,}93$

$K_7 = K_6 \cdot 1{,}0825 = 38319{,}34$

Lösung A27

a) $K_0 = 70000;\ \ n_1 = 10;\ \ p_1\,\% = 6\,\%;\ \ n_2 = 5;\ \ p_2\,\% = 7{,}75\,\%$

$K_{15} = 70000 \cdot 1{,}06^{10} \cdot 1{,}0775^5 = 107768{,}12$

$K_{fehl} = 225000 - K_{15} = 225000 - 107768{,}12 = 117231{,}88$

Frau Papandreou fehlen noch 117 231,88 €.

b) $225000 = 70000 \cdot 1{,}065^n \quad | \quad :70000$

$3{,}214285714 = 1{,}065^n \quad | \quad log$

$log(3{,}214285714) = n \cdot log(1{,}065) \quad | \quad :log(1{,}065)$

$n = 18{,}54$

Frau Papandreou muss ihr Geld 19 *Jahre lang liegen lassen.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 70000 \cdot 1{,}065 = 74550{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}065 = 79395{,}75$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}065 = 84556{,}47$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}065 = \cdots$

... usw. bis

$K_{18} = K_{17} \cdot 1{,}065 = 217465{,}81$

$K_{19} = K_{18} \cdot 1{,}065 = 231601{,}08$

c) $K_{15} = 2 \cdot K_0 = 140000;\ \ n = 15$

$2 = q^{15} \quad \sqrt[15]{}$

$q = 1{,}047$

$p\,\% = (1{,}047 - 1) \cdot 100 \approx 4{,}7\,\%$

Die Bank rechnet mit etwa 4,7 % *Zinsen.*

Lösung A28

a) $K_8 = 16380 + 13200 = 29580;\ \ K_0 = 16380;\ n = 8$

$29580 = 16380 \cdot q^8 \quad | \quad :16380$

$q^8 = 1{,}805860806 \quad | \quad \sqrt[8]{}$

$q = 1{,}0767$

$p\,\% = (1{,}0767 - 1) \cdot 100 \approx 7{,}3\,\%$

Die Bank gewährt etwa 7,3 % *Zinsen.*

b) $35000 = (16380 \cdot 1{,}073^4 + Z) \cdot 1{,}073^4$

$\quad | \quad :1{,}073^4$

$26403{,}97 = 21712{,}65 + Z \quad | \quad -21712{,}65$

$Z = 4691{,}32$

Frau Hägendasz hätte 4 691,32 € *zuzahlen müssen.*

c) $2 = 1{,}045^n \quad | \quad log$

$log(2) = n \cdot log(1{,}045) \quad | \quad :log(1{,}045)$

$n = 15{,}74$

Im 16. *Jahr hätte sich ihr Gewinn verdoppelt.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 16380 \cdot 1{,}045 = 17117{,}10$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}045 = 17887{,}37$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}045 = 18692{,}30$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}045 = \cdots$

... usw. bis

$K_{15} = K_{14} \cdot 1{,}045 = 31699{,}93$

$K_{16} = K_{15} \cdot 1{,}045 = 33126{,}42$

Lösung A29

a) Tilgungsplan:

Jahr	Anfangskapital	Zinssatz	Jahreszinsen	Tilgung	Restschuld
1	70 000,00 €	8,25 %	5 775,00 €	6 500 €	69 275,00 €
2	69 275,00 €	8,25 %	5 715,19 €	6 500 €	68 490,19 €
3	68 490,19 €	8,25 %	5 650,44 €	6 500 €	67 640,63 €
4	67 640,63 €	8,25 %	5 580,35 €	6 500 €	66 720,98 €

b) Jahre Abzahlung über die Rentenformel, dier Restschuld soll null sein:

$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$0 = 70000 \cdot 1{,}0825^n - \frac{6500\cdot(1{,}0825^n-1)}{0{,}0825}$

$0 = 70000 \cdot 1{,}0825^n - 78787{,}87879 \cdot 1{,}0825^n + 78787{,}87879$

$0 = -8787{,}87879 \cdot 1{,}0825^n + 78787{,}87879$

$8787{,}87879 \cdot 1{,}0825^n = 78787{,}87879 \quad | \quad :8787{,}87879$

$1{,}08255^n = 8{,}965517239 \quad | \quad log$

$n \cdot log(1{,}0825) = log(8{,}965517239) \quad | \quad :log(1{,}0825)$

$n = 27{,}67$

Ende des 27. *Jahres ist das Darlehen vopllständig zhurückgfezahlt.*

Lösung A30

a) $K_{erf} = \frac{120000}{0{,}975} = 123076{,}92$

Familie Patschenkofen muss tatsächlich 123 076,92 € *aufnehmen.*

b) Ratenberechnung für Rückzahlung über die Rentenformel:

$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$K_n = 123076{,}92 \cdot 1{,}0775^{15} - \frac{R\cdot(1{,}0775^{15}-1)}{0{,}0775}$

$0 = 123076{,}92 \cdot 1{,}0775^{15} - 26{,}62957 \cdot R$

$26{,}62957 \cdot R = 377082$

$R = 14160{,}27$

Familie Patschenkofen muss jährlich 14 160,27 € *zurückzahlen, damit das Darlehen nach* 15 *Jahren getilgt ist.*

c) Tilgungsplan:

Jahr	Anfangskapital	Zinssatz	Jahreszinsen	Tilgung	Restschuld
1	123 076,92 €	7,75 %	9 538,46 €	14 160,57 €	118 454,81 €
2	118 454,81 €	7,75 %	9 180,25 €	14 160,57 €	113 474,49 €
3	113 474,49 €	7,75 %	8 794,27 €	14 160,57 €	108 108,19 €
4	108 108,19 €	7,75 %	8 378,38 €	14 160,57 €	102 326,00 €

Lösung A31

a) Berechnung des Kapitals nach Abhebung von der Hälfte des Sparguthabens:

$K_4 = K_0 \cdot q^4 = 12600 \cdot 1{,}0775^4 \cdot \frac{1}{2} = 8491{,}99$

Jahre, bis K_4 wieder auf 12 600 € angewaschsen ist:

$K_n = K_4 \cdot q^n$

$12600 = 8491{,}99 \cdot 1{,}0775^n \quad | \quad :84191{,}99$

$1{,}483751158 = 1{,}0775^n \quad | \quad log$

$log(1{,}483751158) = n \cdot log(1{,}0775) \quad | \quad :log(1{,}0775)$

$n = 5{,}28$

Im Verlaufe des 6. *Jahres beträgt das Kapital wieder* 12 600 €

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 8491{,}99 \cdot 1{,}0775 = 9150{,}12$
$K_2 = K_1 \cdot 1{,}0775 = 9859{,}25$
$K_3 = K_2 \cdot 1{,}0775 = 10623{,}35$
$K_4 = K_3 \cdot 1{,}0775 = 11446{,}65$
$K_5 = K_4 \cdot 1{,}0775 = 12333{,}77$
$K_6 = K_5 \cdot 1{,}0775 = 13289{,}64$

b) $q^{20} = 3 \quad | \quad \sqrt[20]{}$
$q = 1{,}05647$
$p\,\% = (1{,}05647 - 1) \cdot 100 = 5{,}65\,\%$
Der Zinssatz müsste $5{,}65\,\%$ *betragen.*

Lösung A32

a) $K_6 = 275000,\ K_0 = 350000;\ n = 6$
$K_6 = K_0 \cdot q^6$
$275000 = 350000 \cdot q^6 \quad | \quad :35000$
$q^6 = 0{,}785714286 \quad | \quad \sqrt[6]{}$
$q = 0{,}96$
$p\,\% = (1 - 0{,}96) \cdot 100 \approx 4{,}0\,\%$
Der jährliche Wertverlust betrug $4{,}0\,\%$.

b) $\frac{4}{7} = 0{,}9324^n \quad | \quad log$
$log\left(\frac{4}{7}\right) = n \cdot log(0{,}9324) \quad | \quad :log(0{,}9324)$
$n = 8$
Der Geschäftsmann kaufte sein Aktienpaket vor etwa 8 *Jahren.*

Ohne Logarithmus:

$\frac{4}{7} \approx 0{,}571428571$
$0{,}93247^2 = 0{,}8694$
$0{,}93247^3 = 0{,}8106$
$0{,}93247^4 = 0{,}7558$
$0{,}93247^5 \ldots$
$0{,}93247^7 = 0{,}6127$
$0{,}93247^8 = 0{,}5712$

c) $4 = 1{,}21905^n \quad | \quad log$
$log(4) = n \cdot log(1{,}21905) \quad | \quad :log(1{,}21905)$
$n \approx 7$
Der Wert des Aktienpaketes vervierfachte sich in 7 *Jahren.*

Ohne Logarithmus:

$1{,}21905^1 = 1{,}21905$
$1{,}21905^2 = 1{,}4861$
$1{,}21905^3 = 1{,}81161$
$1{,}21905^4 \ldots$
$1{,}21905^6 = 3{,}2819$
$1{,}21905^7 = 4{,}0008$

Aufgabe A33

Drei Sparbriefe – jeder in Höhe von 16 000 € – kommen gleichzeitig zur Auszahlung.

a) Sparer A hat vor 8 Jahren sein Kapital zu 5,75 % angelegt. Wie hoch war die Einzahlung?

b) Sparer B hatte zum selben Zeitpunkt 10 505 € eingezahlt. Zu welchem Zinssatz konnte er den Vertrag abschließen?

c) Sparer C konnte sein Kapital von 5009 € zu 8,05 % anlegen. Wie viele Jahre war es auf Zinseszins angelegt?

Aufgabe A34

Für einen Sparvertrag werden 8 000 € eingezahlt. Die Bank gibt 4 Jahre lang 6,5 % Zinsen. Nach diesen 4 Jahren gibt es eine zusätzliche Prämie von 1000 € auf das Konto; gleichzeitig aber sinkt der Zinssatz auf 4,5 %.

a) Wie hoch ist der Kontostand nach insgesamt 8 Jahren?

b) Wäre eine konstante Verzinsung mit 6,5 % ohne Zahlung einer Prämie für den Sparer günstiger?

Aufgabe A35

Der Rentner Erwin Linnemann legt seinen Lottogewinn von 50 000 € bei der Deutschen Bank zu 3,2 % Zinseszins an.

a) Wie lange muss er das Geld anlegen, um seiner Tochter eine Boutique für 68 500 € einrichten zu können?

b) Wenn er sein Geld bei einer südamerikanischen Bank anlegen würde, könnte er die Boutique bereits nach 5 Jahren eröffnen. Welchen Zinssatz hat ihm die Bank eingeräumt?

c) Er entscheidet sich anders und macht nach 3 Jahren von den Zinseszinsen der Deutschen Bank eine Reise nach Rom. Wie teuer ist die Reise?

Aufgabe A36

Vor 8 Jahren hat die Familie Carstensen ihr Haus für 453 000 € erworben und möchte es heute für 750 000 € verkaufen.

a) Berechne die prozentuale Wertsteigerung.

b) Für das Haus liegen zwei Angebote vor:
Käufer A bietet die Hälfte des geforderten Preises sofort. Den Rest will er nach 5 Jahren zahlen, wobei er von einem Zinssatz von 6,2 % ausgeht.
Käufer B will sofort 400 000 € in bar zahlen. Der Rest soll in 2 Jahren überwiesen werden, wobei Käufer B von einem Zinssatz von 5,8 % ausgeht.
Welches ist das günstigste Angebot?

Aufgabe A37

Die Sparkasse in Musterhausen wirbt für folgende Sparform:
Einmalige Einzahlung des Kapitals; Laufzeit 7 Jahre; Verzinsung des Kapitals in den ersten drei Jahren mit 5 %, die letzten 4 Jahre mit 6 %.

a) Wie viel € bekommt man bei einer Einzahlung von 2 000 € ausbezahlt?
b) Wie viel € muss man einzahlen, um 10 000 € ausbezahlt zu bekommen?
c) Welcher durchschnittlichen festen Verzinsung entspricht das Angebot; d. h. bei welchem für alle sieben Jahre gleich bleibenden Zinssatz erhielte man dasselbe Endkapital?

Aufgabe A38

a) Sven legt seinen Lottogewinn in Höhe von 27 050 € zu 3,4 % fest an. Über welchen Vertrag kann er nach 8 Jahren verfügen?
b) Sein Bruder Paul hat mit der Bank einen Ratensparvertrag abgeschlossen und möchte nach 8 Jahren über den gleichen Betrag verfügen können. Wie hoch muss die Rate sein, die er jeweils zu Beginn eines Jahres einzuzahlen hat, wenn die Bank einen Zinssatz von 3,6 % gewährt?
c) Welchen Zinssatz hätte die Bank Sven gewähren müssen, wenn er nach 8 Jahren über einen Betrag von 40 000 € verfügen möchte?
d) Wie lange würde es dauern, bis sich Svens Lottogewinn bei einem Zinssatz von 3,8 % verdoppelt hätte?

Aufgabe A39

Anton erhielt im September 2001 sein erstes Lehrlingsgeld von 540 €. Ausgezahlt bekam er 448 €.

a) Wie viel Prozent Abzüge hat er?
b) Im nächsten Jahr will er seinen Motorradführerschein erwerben. Dazu muss er mit folgenden Kosten rechnen:
709,62 € Grundkosten einschl. theoretischer und praktischer Prüfung
43,22 € für eine Fahrstunde
Berechne die Gesamtkosten, wenn 31 Fahrstunden nötig sind.
c) Um den Führerschein zu bezahlen, nutzt er einen Sparbrief über 1000 €, den seine Eltern vor vier Jahren zu 5,5 % angelegt haben. Wie viel € erhält Anton nach diesen vier Jahren ausgezahlt, wenn die Zinsen mit verzinst wurden?
d) Welchen Betrag muss er von seinem Lehrlingsgeld monatlich noch sparen, um den Rest in neun Monaten selbst bezahlen zu können?

Aufgabe A40

Christine möchte sich ein Moped kaufen. Das Moped kostet 1 700 €.
Berechne die darin enthaltene Mehrwertsteuer von 19 %.

a) Der Händler bietet ihr bei Barzahlung 2 % Skonto an. Berechne den Barzahlungspreis für das Moped.
b) Christines Eltern hatten für sie vor fünf Jahren ein Guthaben von 1 400 € mit einem Zinssatz von 6,15 % fest angelegt. Die Zinsen wurden mit verzinst. Welchen Betrag erhielt Christine bei Ablauf der Geldanlage ausgezahlt?
c) Um wie viel Prozent ist das Guthaben in den fünf Jahren gewachsen?
d) Bis zur Auslieferung des Mopeds bietet sich für den ausgezahlten Betrag ein Termingeld zu einem jährlichen Zinssatz von 3,2 % an. Berechne, wie viele Zinsen Christine nach einem Vierteljahr bekommt.

Lösung A33

$K_n = 16000$ für alle Teilaufgaben

a) Sparer A:

$K_n = K_0 \cdot q^n; \quad n = 8$

$16000 = K_0 \cdot 1{,}0575^8 \quad | \quad : 1{,}0575^8$

$K_0 = 10230{,}03$

Sparer A hatte ein Kapital in Höhe von $10\,230{,}03$ € *angelegt.*

b) Sparer B:

$K_n = K_0 \cdot q^n; \quad K_0 = 10505$

$16000 = 10505 \cdot q^8 \quad | \quad : 10505$

$q^8 = 1{,}523084246 \quad | \quad \sqrt[3]{}$

$q = 1{,}054$

$p\,\% = (1{,}054 - 1) \cdot 100 \approx 5{,}4\,\%$

Sparer B konnte den Vertrag mit $5{,}4\,\%$ *Zinsen abschließen.*

c) Sparer C:

$K_n = K_0 \cdot q^n; \quad K_0 = 5009$

$16000 = 5009 \cdot 1{,}0805^n \quad | \quad : 5009$

$3{,}194250349 = 1{,}0805^n \quad | \quad log$

$log(3{,}194250349) = n \cdot log(1{,}0805) \quad | \quad : log(1{,}0805)$

$n = 15$

Sparer C hatte sein Geld 15 *Jahre lang angelegt.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 5009 \cdot 1{,}0805 = 5412{,}22$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}0805 = 5847{,}91$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}0805 = 6318{,}67$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}0805 = \cdots$

… usw. bis

$K_{14} = K_{13} \cdot 1{,}0825 = 14808{,}05$

$K_{15} = K_{14} \cdot 1{,}0825 = 16000{,}10$

Lösung A34

a) Überlege bei solchen Aufgabenstellungen einfach, was sich auf der Bank so zuträgt.

Geld wird eingezahlt $(K_0 = 8000)$ und wird zunächst einmal für 4 Jahre bei $6{,}5\,\%$ Zinsen verzinst:

$K_4 = K_0 \cdot q^4 = 8000 \cdot 1{,}065^4$

Jetzt gibt eine Prämie von $1\,000$ € obendrauf:

$K_{4+} = 8000 \cdot 1{,}065^4 + 1000$

Jetzt wird dieser Geldbetrag (nämlich K_{4+}) weitere 4 Jahre lang verzinst, aber nur bei $4{,}5\,\%$ Zinsen:

$K_8 = (8000 \cdot 1{,}065^4 + 1000) \cdot 1{,}045^4$

Ausrechnen und fertig:

$K_8 = 13465{,}60$

Der Kontostand nach 8 *Jahren ist* $13\,465{,}60$ €.

b) Verzinsung ohne Prämie:

$K_4 = K_0 \cdot q^8 = 8000 \cdot 1{,}065^8 = 13239{,}97$

Eine konstante Verzinsung mit $6{,}5\%$ *ohne Prämie wäre ungünstiger.*

Lösung A35

a) $K_0 = 50000;\ \ K_n = 68500;\ \ p\,\% = 3{,}2\,\%$

$K_n = K_0 \cdot q^n$

$68500 = 50000 \cdot 1{,}032^n \quad | \quad :50000$

$1{,}37 = 1{,}032^n \quad | \quad log$

$log(1{,}37) = n \cdot log(1{,}032) \quad | \quad :log(1{,}032)$

$n = 10$

Herr Linnemann muss das Geld 10 *Jahre lang liegen lassen.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 50000 \cdot 1{,}032 = 51600{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}032 = 53251{,}20$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}032 = 54955{,}24$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}032 = \cdots$

… usw. bis

$K_9 = K_8 \cdot 1{,}032 = 66387{,}65$

$K_{10} = K_9 \cdot 1{,}032 = 68512{,}05$

b) $68500 = 50000 \cdot q^5 \quad | \quad :50000$

$1{,}38 = q^5 \quad | \quad \sqrt[5]{\ }$

$q = 1{,}0665$

$p\,\% = (1{,}0665 - 1) \cdot 100 \approx 6{,}65\,\%$

Die südamerikanische Bank rechnet mit etwa $6{,}65\,\%$ *Zinsen.*

c) Zinseszinsen nach Jahren:

$Z_3 = K_3 - K_0$

$K_3 = 50000 \cdot 1{,}032^3 = 54955{,}24$

$Z_3 = 54955{,}24 - 50000 = 4955{,}24$

Die Weltreise kostet $4\,955{,}234$ *€.*

Lösung A36

a) $K_n = K_0 \cdot q^n$

$750000 = 453000 \cdot q^8 \quad | \quad :452000$

$1{,}655629139 = q^8 \quad | \quad \sqrt[8]{\ }$

$q = 1{,}065$

$p\,\% = (1{,}065 - 1) \cdot 100 = 6{,}5\,\%$

Die jährliche Wertsteigerung beträgt $6{,}5\,\%$.

b) Käufer A:

$750000 \cdot \frac{1}{2} = 375000$

$375\,000$ € werden sofort bezahlt. Für die zweiten $375\,000$ € ist das Anfangskapital gesucht, welches in 5 Jahren bei $6{,}2\,\%$ Zinsen die $375\,000$ € ergibt:

$375000 = K_0 \cdot 1{,}062^5 \quad | \quad :1{,}062^5$

$K_0 = 277593{,}11$

Käufer A bietet somit $375\,000$ € $+ 277\,593{,}11$ € $= 652\,593{,}11$ €.

Käufer B:

$400\,000$ € werden sofort bezahlt. Für die restlichen $350\,000$ € ist das Anfangskapital gesucht, welches in 2 Jahren bei $5{,}8\,\%$ Zinsen die $350\,000$ € ergibt:

$350000 = K_0 \cdot 1{,}058^2 \quad | \quad :1{,}058^2$

$K_0 = 312677{,}56$

Käufer B bietet somit $400\,000$ € $+ 312\,677{,}56$ € $= 662\,677{,}56$ €.

Das Angebot von Käufer B ist günstiger (für den Verkäufer).

Lösung A37

Variabler Zinssatz, 3 Jahre 5 % und 4 Jahre lang 6 %, $n = 7$.

a) $K_7 = K_0 \cdot 1{,}05^3 \cdot 1{,}06^4 = 2000 \cdot 1{,}05^3 \cdot 1{,}06^4 = 2922{,}95$

Man bekommt 2 922,95 € *ausgezahlt.*

b) $K_7 = 10000$; K_0 gesucht.

$K_7 = 10000$

$10000 = K_0 \cdot 1{,}05^3 \cdot 1{,}06^4 \quad | \quad :(1{,}05^3 \cdot 1{,}06^4)$

$K_0 = 6842{,}40$

Man muss 6 842,40 € *einzahlen.*

c) Gleicher Zinssatz über 7 Jahre:

$K_7 = K_0 \cdot q^7$

$2922{,}95 = 2000 \cdot q^7 \quad | \quad :2000$

$1{,}461125 = q^7 \quad | \quad \sqrt[7]{}$

$q = 1{,}056$

$p\,\% = (1{,}056 - 1) \cdot 100 = 5{,}6\,\%$

Der gleichbleibende Zinssatz müsste 5,6 % *betragen.*

Lösung A38

a) $K_8 = K_0 \cdot q^8$

$K_8 = 27050 \cdot 1{,}034^8 = 35345{,}29$

Nach 8 *Jahren stehen* 35 345,29 € *bereit.*

b) Ratensparvertrag mit:

$K_8 = R \cdot (q^8 + q^7 + q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q)$

$35345{,}29 = R \cdot (1{,}036^8 + 1{,}036^7 + 1{,}036^6 + 1{,}036^5 + 1{,}036^4 + 1{,}036^3 + 1{,}036^2 + 1{,}036)$

$35345{,}29 = 9{,}411 \cdot R \quad | \quad :9{,}411$

$R = 3755{,}74$

Pauls Bruder muss jährlich 3 755,74 € *einzahlen.*

c) $40000 = 27050 \cdot q^8 \quad | \quad :27050$

$1{,}478743068 = q^8 \quad | \quad \sqrt[8]{}$

$q = 1{,}0501$

$p\,\% = (1{,}05 - 1) \cdot 100 = 5{,}0\,\%$

Die Bank müsste 5,0 % *Verzinsung bieten.*

d) $2 = 1{,}038^n \quad | \quad log$

$log(2) = n \cdot log(1{,}038) \quad | \quad :log(1{,}038)$

$n = 18{,}59$

Im 19. *Jahr verdoppelt sich Svens Kapitaleinlage.*

Ohne Logarithmus:

$q_1 = 1{,}038^1 = 1{,}038$

$q_2 = q_1 \cdot 1{,}038 = 1{,}077444$

$q_3 = q_2 \cdot 1{,}038 = 1{,}16089$

$q_4 = q_3 \cdot 1{,}038 = 1{,}205$

... usw. bis

$q_{18} = q_{17} \cdot 1{,}038 = 1{,}9568$

$K_{19} = K_{18} \cdot 1{,}038 = 2{,}031$

Lösung A39

a) $q_{Abzug} = \frac{488}{540} = 0{,}9037$

$p_{Abzug}\,\% = (1 - 0{,}9037) \cdot 100 \approx 9{,}6\,\%$

Anton hat etwa $9{,}6\,\%$ *Abzüge.*

b) Kosten Motorradfphrerschein:

$K = 709{,}62 + 31 \cdot 43{,}22 = 2049{,}44$

Anton's Führerschein kostet $2\,049{,}44$ *€.*

c) Wert des Sparbriefes:

$K_4 = K_0 \cdot q^4 = 1000 \cdot 1{,}055^4 = 1238{,}82$

Anton kann über $1\,238{,}82$ *€ verfügen.*

d) Differenz zu Führerscheinkosten:

$K_{Diff} = 2049{,}44 - 1238{,}82 = 810{,}62$

Monatlicher Sparbetrag

$S = \frac{K_{Diff}}{9} = \frac{810{,}62}{9} = 90{,}07$

Anton muss etwa 90 *€ monmatlich sparen.*

Lösung A40

Nettobetrag des Mopeds:

$G = \frac{W}{p\,\%} = \frac{1700}{1{,}19} = 1428{,}57$

Das Moped kostet ohne Mehrwertsteuer $1\,428{,}57$ *€.*

a) Barzahlungspreis:

Wenn man $2\,\%$ Skonto erhält, muss man ja noch $98\,\%$ bezahlen.

$W = 1700 \cdot 0{,}98 = 1666$

Der Barzahlungspreis für das Moped beträgt $1\,666$ *€.*

b) Ablauf einer Geldanlage:

$K_n = K_0 \cdot q^n = 1400 \cdot 1{,}0615^5 = 1886{,}81$

Christine kann über $1\,886{,}81$ *€ verfügen.*

c) Gesamtwachstum der Anlage von b):

$q_{ges} = \frac{1886{,}81}{1400} = 1{,}3477$

$p_{ges}\,\% = (1{,}347 - 1) \cdot 100 \approx 34{,}8\,\%$

Die Anlage ist insgesamt etwa $34{,}8\,\%$ *gestiegen.*

d) Berechnung des Termingeldes auf 3 Monate.

$Z_{\frac{1}{4}} = K_0 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{p\,\%}{100} = 1886{,}81 \cdot 0{,}008 = 15{,}10$

Die Zinsen aus dem Termingeld belaufen sich auf $15{,}10$ *€.*

Aufgabe A41

Ein Guthaben wird zwei Jahre zu einem Zinssatz von 5 % angelegt und danach 6 Jahre zu 8 %. Es werden schließlich 3 499,06 € ausgezahlt.

a) Berechne das Startkapital des Sparers.
b) Wie viele Tage muss das Geld noch gespart werden, wenn man 3 600,00 € ansparen will?
c) Wie hoch wäre die Auszahlung gewesen, wenn die Bank über 8 Jahre 7 % Zinsen berechnet hätte?

Aufgabe A42

Eine Frau bringt ihren Lottogewinn zur Bank. Sie erhält für ihre 10 520,00 € jährlich 5,5 % Zinsen.

a) Auf welchen Betrag ist ihr Gewinn nach 6 Jahren angewachsen?
b) Wie lange muss sie vom Zeitpunkt des Lottogewinns warten, bis ihr Guthaben auf 20 000 € angewachsen ist?
c) Sie versucht, schneller Gewinn zu machen und kauft für ihren Lottogewinn an der Börse Aktien. Ihr Kapital vermindert sich in 2 Jahren um 2 500 €. Wie viel Prozent betrug die jährliche Wertminderung?

Aufgabe A43

Frau Wagner legt zur Geburt ihres Sohnes 4 000 € auf eine Sparkonto an. Die Bank zahlt 5 % Zinsen.

a) Wie viel erhält der junge Mann an seinem 18. Geburtstag?
b) Wie viel erhält er an seinem 18. Geburtstag, wenn sein Vater zusätzlich noch am Ende jeden Jahres 800 € einzahlt?

Aufgabe A44

Ein Haus, das auf 320 000 € geschätzt wird, soll verkauft werden.

a) Ein Käufer bietet an, 265 000 € sofort in bar zu bezahlen und weitere 60 000 € in vier Jahren. Vergleiche dieses Angebot mit dem Schätzpreis, wenn man mit 6 % Zinseszins rechnet.
b) Das Haus wird dann doch erst 3 Jahre später für 397 500 € verkauft. Welcher Verzinsung entspricht dieser Wertzuwachs?

Aufgabe A45

Firma Meyer kauft eine Maschine im Wert von 70 000 €. Man nimmt an, dass diese Maschine jährlich jeweils 20 % ihres Zeitwertes pro Jahr verliert.

a) Wie viel wäre dann die Maschine nach 7 Jahren noch wert?
b) In welchem Jahr sinkt der Zeitwert erstmals unter die Hälfte des Neuwerts?
c) Entgegen der Annahme hat die Maschine nach 3 Jahren nur noch einen Wert von 25 000 €. Welcher durchschnittlichen jährlichen prozentualen Wertminderung würde das entsprechen?

Aufgabe A46

Herr Schmidt legt bei seiner Bank 15 000 € zu folgenden Bedingungen an: Zinssatz im 1. Jahr 2,5 %, im 2. Jahr 4,5 % und im 3. Jahr 4,75 %. Die Zinsen werden jeweils mit verzinst.

a) Wie hoch ist sein Guthaben nach 3 Jahren?
b) Welchem durchschnittlichen jährlichen Zinssatz entspricht dies?
c) Welches Anfangskapital wäre bei 3,6 % Zinseszins nach drei Jahren auf 20 000 € angestiegen?

Aufgabe A47

Ein Bauplatz kostete vor 5 Jahren 30 000 €.

a) Wie teuer muss er heute verkauft werden, wenn man keinen Verlust erleiden will. Als Zinssatz werden 8 % angenommen.
b) Der Bauplatz wird tatsächlich für 50 000 € verkauft. Welcher Verzinsung entspricht dieser Preis?
d) Herr Clausen hat vor 10 Jahren 30 000 € zu 5 % Zinseszins auf einem Sparkonto angelegt. Zusätzlich hat er noch am Ende jeden Jahres 2 500 € eingezahlt. Kann er mit diesem Guthaben den Bauplatz bezahlen?

Aufgabe A48

Die Sparkasse Wuppertal wirbt für folgende Sparform:
Einmalige Einzahlung des Kapitals; Laufzeit 7 Jahre; das Kapital wird die ersten 3 Jahre mit 5 % verzinst, die restlichen Jahre mit 6 %.

a) Wie viele € bekommt man bei einer Einzahlung von 2 000 € ausgezahlt?
b) Wie viele € muss man einzahlen, um 10 000 € ausgezahlt zu bekommen?
c) Welcher durchschnittlichen (festen) Verzinsung entspricht das Angebot?

Lösung A41

a) Variabler Zinssatz, zwei Jahre mit 5 %, danach sechs Jahre mit 8 %.

$3499{,}06 = K_0 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}08^6 \quad | \quad : (1{,}05^2 \cdot 1{,}08^6)$

$K_0 = 2000{,}00$

Das Startkapital betrug 2 000,00 €.

b) Tage für Restzinsen

$Z = 3600{,}00 - K_8 = 3600{,}00 - 3499{,}06 = 100{,}94$

$100{,}94 = \frac{K \cdot t \cdot p\,\%}{100} = \frac{3499{,}06 \cdot t \cdot 8}{100}$

$= 279{,}9248 \cdot t \quad | \quad : 279{,}9248$

$t = 0{,}3606 \quad | \quad \cdot 12$

$t = 4{,}3272 \quad | \quad \cdot 30$

$t = 129{,}81$

Das Geld muss noch 130 *Tage weier gespart werden.*

c) $K_n = K_0 \cdot q^n; \quad K_0 = 2000; \quad n = 8; \quad p\,\% = 7\,\%$

$K_n = 2000 \cdot 1{,}07^8 = 3436{,}37$

Das Kapital wäre auf 3 436,37 € *anmgewachsen.*

Lösung A42

a) $K_0 = 10520; \quad n = 6; \quad p\,\% = 5{,}5\,\%$

$K_n = K_0 \cdot q^n = 10520 \cdot 1{,}055^6 = 14505{,}43$

Ihr Gewinn ist nach 6 *Jahren ist* 14 505,43 € *angewachsen.*

b) $20000 = 10520 \cdot 1{,}055^n \quad | \quad : 10520$

$1{,}901140684 = 1{,}055^n \quad | \quad log$

$log(1{,}901140684) = n \cdot log(1{,}055) \quad | \quad : log(1{,}055)$

$n = 12$

Sie muss das Geld 12 *Jahre lang liegen lassen.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 10520 \cdot 1{,}055 = 11098{,}60$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}055 = 11709{,}02$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}055 = 12353{,}02$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}055 = \cdots$

… usw. bis

$K_{11} = K_{10} \cdot 1{,}055 = 18958{,}01$

$K_{12} = K_{11} \cdot 1{,}055 = 20000{,}70$

c) $K_2 = K_0 - 2500 = 10520 - 2500 = 8020$

$8020 = 10520 \cdot q^2 \quad | \quad : 10520$

$q^2 = 0{,}762357414 \quad | \quad \sqrt{}$

$q = 0{,}8731$

$p\,\% = (1 - 0{,}8731) \cdot 100 \approx 12{,}7\,\%$

Der jährliche Verlust betrug etwa 12,7 %.

Lösung A43

a) $K_{18} = 4000 \cdot 1{,}05^{18} = 9626{,}48$

An seinem 18. *Geburtstag stehen* 9 626,48 € *zur Verfügung.*

b) $K_{18} = 4000 \cdot 1{,}05^{18} + R(1{,}05^{17} + 1{,}05^{16} + 1{,}05^{15} + \cdots + 1{,}05^2 + 1{,}05)$

$K_{18} = 9626{,}48 + 800 \cdot (1{,}05^{17} + 1{,}05^{16} + 1{,}05^{15} + \cdots + 1{,}05^2 + 1{,}05)$

$K_{18} = 9626{,}48 + 800 \cdot 27{,}13 = 31330{,}48$

An seinem 18. *Geburtstag stehen jetzt* 31 330,48 € *zur Verfügung.*

Lösung A44

a) Ermittlung des Barwertes.

$60000 = K_0 \cdot 1{,}06^4 \quad | \quad : 1{,}06^4$

$K_0 = 47525{,}62$

$B = 265000 + 47525{,}62 = 312525{,}62$

Das Kaufangebot ist für den Verkäufer ungünstig.

b) $397500 = 320000 \cdot q^3 \quad | \quad : 320000$

$q^3 = 1{,}2421875 \quad | \quad \sqrt[3]{}$

$q = 1{,}075$

$p\,\% = (1{,}075 - 1) \cdot 100 = 7{,}5\,\%$

Der Wertzuwachs entspricht einer Verzinsung von $7{,}5\,\%$.

Lösung A45

$20\,\%$ Verlust pro Jahr bedeutet noch $80\,\%$ Wert.

a) $K_7 = K_0 \cdot 0{,}8^7 = 70000 \cdot 0{,}8^7 = 14680{,}06$

Nach 7 *Jahren ist die Maschine noch* $14\,680{,}06$ € *Wert.*

b) $0{,}5 = 0{,}8^n \quad | \quad log$

$log(0{,}5) = n \cdot log(0{,}8) \quad | \quad : log(0{,}8)$

$n = 3{,}1$

Im Verlaufe des 4. *Jahres beträgt der Zeitwert erstmals nur noch die Hälfte.*

Ohne Logarithmus:

$W_1 = 0{,}8^1 = 0{,}8$

$W_2 = W_1 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$

$W_3 = W_2 \cdot 0{,}8 = 0{,}512$

$W_4 = W_3 \cdot 0{,}8 = 0{,}4096$

c) $25000 = 70000 \cdot q^3 \quad | \quad : 70000$

$0{,}357142857 = q^3 \quad | \quad \sqrt[3]{}$

$q = 0{,}7095$

$p\,\% = (1 - 0{,}7095) \cdot 100 \approx 29\,\%$

Der jährliche Wertverlust liegt bei etwa $29\,\%$.

Lösung A46

Variabler Zinssatz

a) $K_3 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 15000 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}045 \cdot 1{,}0475 = 16830{,}05$

Nach 3 *Jahren stehen* $16\,830{,}05$ € *bereit.*

b) $K_3 = K_0 \cdot q^3$

$16830{,}05 = 15000 \cdot q^3 \quad | \quad : 15000$

$1{,}122 = q^3 \quad | \quad \sqrt[3]{}$

$q = 1{,}039$

$p\,\% = (1{,}039 - 1) \cdot 100 \approx 3{,}9\,\%$

Der durchschnittliche jährliche Wertzuwachs liegt bei $3{,}9\,\%$.

c) $K_3 = K_0 \cdot q^3$

$20000 = K_0 \cdot 1{,}036^3 \quad | \quad : 1{,}036^3$

$K_0 = 17986{,}67$

Das Anfangskapital wäre $17\,986{,}67$ €.

Lösung A47

a) $K_5 = K_0 \cdot 1{,}08^5 = 30000 \cdot 1{,}08^5 = 44079{,}84$

Man muss den Bauplatgz für mindestens $44\,1400{,}00$ € *verkaufen.*

b) $50000 = 30000 \cdot q^5 \quad | \quad :30000$

$1{,}66666667 = q^5 \quad | \quad \sqrt[5]{}$

$q = 1{,}1076$

$p\,\% = (1{,}1076 - 1) \cdot 100 \approx 10{,}8\,\%$

Der jährliche Wertzuwachs liegt bei etwa $10{,}8\,\%$.

c) $K_{10} = 30000 \cdot 1{,}05^{10} + 2500 \cdot (1{,}05^9 + 1{,}05^8 + 1{,}05^7 + 1{,}05^6 + \cdots + 1{,}05^2 + 1{,}05)$

$K_{10} = 48866{,}84 + 2500 \cdot 10{,}3 = 74616{,}84$

Herr Clausen kann den Bauplatz problemlos bar bezahlen.

Lösung A48

Kapitalanlage mit varialem Zinssatz

a) $K_7 = 2000 \cdot 1{,}05^3 \cdot 1{,}06^4 = 2922{,}95$

Man bekommt $2\,922{,}95$ € *ausbezahlt.*

b) $10000 = K_0 \cdot 1{,}05^3 \cdot 1{,}06^4 \quad | \quad :(1{,}05^3 \cdot 1{,}06^4)$

$K_0 = 6842{,}40$

Man müsste $6\,842{,}40$ € *anlegen.*

c) $K_7 = K_0 \cdot q^7$

$2922{,}95 = 2000 \cdot q^7 \quad | \quad :2000$

$q^7 = 1{,}461475 \quad | \quad \sqrt[7]{}$

$q = 1{,}056$

$p\,\% = (1{,}056 - 1) \cdot 100 = 5{,}6\,\%$

Der durchschnittliche jährliche Wertzuwachs liegt bei $5{,}6\,\%$.