Aufgabe A9

a) Herr Schmitz möchte seinem Sohn Michael bei Volljährigkeit (18 Jahre) $20\,000$ € für die Finanzierung seiner Ausbildung zur Verfügung stellen.
Welchen Betrag muss der Vater bei der Geburt seines Sohnes bei der Bank einzahlen, wenn diese ihm $3{,}5\,\%$ Zinsen gewährt?

b) Zu seinem $18.$ Geburtstag bekommt Michael von seiner Tante noch einmal $20\,000$ €. Er legt nun den Gesamtbetrag bei einer anderen Bank zu $4\,\%$ Zinsen an. Die jährlich anfallenden Zinsen plant er, als Taschengeld zu verbrauchen.
Über welches monatliche Taschengeld kann Michael verfügen?

c) Einige Jahre später hebt Michael vom Konto $24\,000$ € ab, um sich davon einen Kleinwagen zu kaufen. Zum Ausgleich belässt er die Zinsen nun auf dem Konto. Wie viele Jahre dauert es, bis der Kontostand wieder $20\,000$ € erreicht hat?

e) Michael fährt seinen Kleinwagen 6 Jahre und verkauft ihn dann für $11\,000$ €. Berechne den jährlichen prozentualen Verlust.

Aufgabe A10

An ihrem $10.$ Geburtstag bekommt Melanie von ihrer Erbtante $5\,000$ € geschenkt. Wenn sie das Geld nicht verbraucht, soll sie an ihrem $15.$ Geburtstag noch einmal $5\,000$ € bekommen. Wenn sie das Geld wieder nicht anrührt erhält sie bis zu ihrer Volljährigkeit mit 18 Jahren den gleichen Betrag, der sich bis dahin auf ihrem Sparbuch angesammelt hat.

a) Melanies Hausbank gewährt für die ganze Zeit einen Zinssatz von $4{,}3\,\%$.
Eine Privatbank würde Melanie für die erste Summe $3{,}7\,\%$ Zinsen gewähren und für das Geld, das sie ab dem $15.$ Lebensjahr auf ihrem Konto hat, $4{,}75\,\%$.
Welches Angebot wird Melanie annehmen?

b) Melanies Vater könnte das Geld zum $10.$ und $15.$ Geburtstag gut für Investitionen in seiner Firma gebrauchen. Die Erbtante ist daraufhin bereit, $7\,000$ € sofort auszuzahlen, wenn Katja zu ihrem $18.$ Geburtstag von ihrem Vater den doppelten Betrag erhält. Mit welchem Zinssatz muss Melanies Vater rechnen?

c) Die Tante bietet Melanie auch an, ihr $8\,000$ € sofort auszuzahlen und das Ersparte zu verdoppeln, wenn die ursprüngliche Summe den $1\,\frac{1}{2}$-fachen Wert erreicht hat. Wann wäre das bei dem Zinssatz der Hausbank der Fall?

Aufgabe A11

Zum Aufbau einer Werkstatt nimmt ein Jungunternehmer ein Darlehen bei der Bank in Höhe von $250\,000$ € auf, das er je nach Ertragslage tilgen kann. Das Darlehen wird mit $4{,}6\,\%$ verzinst. Nach 6 Jahren zahlt er $200\,000$ € zurück. Nach weiteren 4 Jahren kann er $120\,000$ € tilgen.
Wie hoch ist seine Restschuld?

Aufgabe A12

Klaus hat vor 8 Jahren $16\,500$ € geerbt und dieses Erbe zu $5{,}2$ % fest angelegt.

a) Über welchen Betrag kann er heute verfügen?

b) Klaus möchte sein heutiges Kapital wieder anlegen und in 6 Jahren über $30\,000$ € verfügen. Welchen Zinssatz müsste die Bank gewähren?

c) Klaus‘ Bruder Martin will nach 6 Jahren über den gleichen Betrag verfügen. Er vereinbart mit der Bank den gleichen Zinssatz wie sein Bruder Klaus und gleiche jährliche Einmalzahlungen am Anfang jeden Jahres. Welchen Betrag muss Jan am Anfang eines jeden Jahres einzahlen?

d) Klaus möchte wissen, wie lange es dauert, bis sich sein heutiges Kapital verdoppelt, sollte die Bank einen Zinssatz von $4{,}85$ % gewähren.

Aufgabe A13

a) Herr Nansen möchte seinem Nachbarn ein 6 Jahre altes Wohnmobil für $25\,000$ € abkaufen. Wie hoch war der Neupreis, wenn man mit einem jährlichen durchschnittlichen Wertverlust von $11{,}5$ % rechnen muss?

b) Wie hoch ist der jährliche Wertverlust einer Maschine, deren Wert innerhalb von 8 Jahren auf ein Achtel ihres Anfangswertes gesunken ist?

c) Herr Nansen besitzt das Bild eines berühmten Malers. In wie vielen Jahren steigt der Wert dieses Bildes von $35\,000$ € auf $400\,000$ € bei einer angenommenen Wertsteigerung von 15 %?

Aufgabe A14

Svenja hat vor 6 Jahren im Lotto gewonnen und von dem Gewinn $17\,540$ € für Anschaffungen ausgegeben, den Rest allerdings zu $3{,}8$ % fest angelegt. Heute kann sie über $91\,132{,}50$ € verfügen.

a) Welchen Betrag hatte sie vor 6 Jahren gewonnen?

b) Über welchen Betrag hätte Svenja heute verfügen können, wenn sie vor 6 Jahren den gesamten Gewinn zu gleichen Bedingungen angelegt hätte?

c) Wie lange muss sie noch warten, bis ihr heutiges Kapital bei einem Zinssatz von $5{,}25$ % auf $120\,000$ € angewachsen ist?

d) Bei welchem Zinssatz würde sich ihr heutiges Kapital in 10 Jahren verdoppeln?

Aufgabe A15

Um sich in acht Jahren ein Haus bauen zu können, legt ein Ehepaar seine Ersparnisse von $17\,200$ € zu $5{,}5$ % Zinseszins bei einer Bank an. Nach drei Jahren zahlt es auf dasselbe Konto noch einmal $8\,800$ € ein und vereinbart einen neuen Zinssatz von 6 % jährlich. Am Schluss legt es noch einmal $1\,200$ € dazu.

a) Wie viel Geld liegt dann auf dem Konto?

b) Wie viel Prozent der Bausumme von $300\,000$ € kann es dann für das Haus anzahlen?

c) Wie viel Geld hätte das Ehepaar gehabt, wenn es stattdessen 8 Jahre lang zu Beginn eines Jahres $4\,000$ € in einen Ratensparvertrag eingezahlt hätte – 5,3% vorausgesetzt. Wie viel Prozent der Bausumme hätten sie in diesem Fall anzahlen können?

Aufgabe A16

Ein Vater möchte die spätere Ausbildung seiner Tochter finanziell absichern.

a) Welchen Betrag muss er auf die Sparkasse bringen, damit ihr bei einem jährlichen Zinssatz von $5{,}5\,\%$ nach 18 Jahren $30\,000\,€$ zur Verfügung stehen?

b) Ein anderes Geldinstitut bietet dem Vater an, bei einer Einzahlung von $10\,510\,€$ nach 18 Jahren $30\,000\,€$ auszuzahlen. Mit welchem Zinssatz rechnet das Institut?

c) Welcher Betrag würde der Tochter nach 18 Jahren zur Verfügung stehen, wenn der Vater bei einem Zinssatz von $5{,}2\,\%$ **nacheinander** folgende Einzahlungen vornehmen würde:

heute:	$3\,000\,€$
in 4 Jahren:	$3\,000\,€$
in 8 Jahren:	$3\,000\,€$
in 12 Jahren:	$3\,000\,€$

Lösung A9

a) $K_{18} = 20000;\ n = 18;\ p\,\% = 3{,}5\,\%$

$20000 = K_0 \cdot 1{,}035^{18}$ | $:1{,}035^{18}$

$K_0 = 10767{,}22$

Herr Schmitz muss $10\,767{,}22$ € *einzahlen.*

b) $K_0 = 20000 + 20000 = 40000$

$K_1 = 40000 \cdot 1{,}04 = 41600$

$Z_1 = K_1 - K_0 = 41600 - 40000 = 1600$

Michael kann pro Jahr über $1\,600$ € *Taschengeld verfügen. Das sind monatlich* $133{,}33$ €.

c) Da Michael ja die jährlichen Zinsen verbraucht, hat er nach Abhebung der $24\,000$ € noch ein Anfangskapital von $K_0 = 40000 - 24000 = 16000$, welches nun wieder auf $20\,000$ € anwachsen soll.

$20000 = 16000 \cdot 1{,}04^n$ | $:16000$

$1{,}25 = 1{,}04^n$ | log

$log(1{,}25) = n \cdot log(1{,}04)$ | $:log(1{,}04)$

$n = 5{,}68$

Im $6.$ *Jahr ist das Ursprungskapital wieder verfügbar.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 16000 \cdot 1{,}04 = 16640{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}04 = 17305{,}60$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}04 = 17997{,}82$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}04 = 18717{,}74$

$K_5 = K_4 \cdot 1{,}04 = 19466{,}45$

$K_6 = K_5 \cdot 1{,}04 = 20245{,}10$

d) $K_0 = 24000;\ K_6 = 11000;\ n = 6$

$11000 = 24000 \cdot q^6$ | $:24000$

$q^6 = 0{,}458333333$ | $\sqrt[6]{\ }$

$q = 0{,}8781$

$p\,\% = (1 - 0{,}8781) \cdot 100 \approx 12{,}2\,\%$

Der jährliche Wertverlust liegt bei $12{,}2\,\%$.

Lösung A10

$K_0 = 5000;\ \ n = 5$; danach Zuzahlung von 5000 und weitere Verzinsung mit $n = 3$ zu $p\,\% = 4{,}3\,\%$ (Bank A).

a) Bank A:

$K_8 = (5000 \cdot 1{,}043^5 + 5000) \cdot 1{,}043^3 = 12675{,}49$

Bank B:

$K_8 = (5000 \cdot 1{,}037^5 + 5000) \cdot 1{,}0475^3 = 12638{,}57$

Melanie wird sich für Bank A entscheiden.

b) $K_8 = 14000;\ K_0 = 7000;\ n = 8$

$14000 = 7000 \cdot q^8$ | $:7000$

$q^8 = 2$ | $\sqrt[8]{\ }$

$q = 1{,}0905$

$p\,\% = (1{,}0905 - 1) \cdot 100 \approx 9{,}1\,\%$

Melanie Vater muss mit einer Verzinsung von $9{,}1\,\%$ *rechnen.*

c) $K_n = 12000;\ K_0 = 8000;\ p\,\% = 4{,}3\,\%$

$12000 = 8000 \cdot 1{,}043^n \quad | \quad :8000$

$1{,}5 = 1{,}043^n \quad | \quad log$

$log(1{,}5) = n \cdot log(1{,}043) \quad | \quad :log(1{,}043)$

$n = 9{,}68$

Im $10.$ *Jahr ist das* $1\,\frac{1}{2}$-fache *der ursprünglichen Summe erreicht.*

Ohne Logarithmus:

$K_1 = 8000 \cdot 1{,}043 = 8344{,}00$

$K_2 = K_1 \cdot 1{,}043 = 8702{,}79$

$K_3 = K_2 \cdot 1{,}043 = 9077{,}01$

$K_4 = K_3 \cdot 1{,}043 \ldots$

… usw. bis

$K_9 = K_8 \cdot 1{,}04 = 11685{,}54$

$K_{10} = K_9 \cdot 1{,}04 = 12188{,}02$

Lösung A11

$K_0 = 250000;\ \ n = 10;\ \ p\,\% = 4{,}6\,\%$; Tilgung nach 6 Jahren 200000 und nach weiteren 4 Jahren 120000.

$K_{10} = (250000 \cdot 1{,}046^6 - 200000) \cdot 1{,}046^4 - 120000 = 32555{,}67$

Die Restschuld nach 10 *Jahren beträgt* $32\,555{,}67$ €.

Lösung A12

$K_0 = 16500;\ \ n = 8;\ \ p\,\% = 5{,}2\,\%$

a) $K_8 = 16500 \cdot 1{,}052^8 = 24751{,}98$

Klaus kann über $24\,751{,}98$ € *verfügen.*

b) $K_6 = 30000;\ K_0 = 24751{,}98;\ n = 6$

$30000 = 24751{,}98 \cdot q^6 \quad | \quad :24751{,}98$

$q^6 = 1{,}21202425 \quad | \quad \sqrt[6]{\ }$

$q = 1{,}0326$

$p\,\% = (1{,}0326 - 1) \cdot 100 = 3{,}26\,\%$

Die Bank muss einen zins in Höhe von $3{,}26\,\%$ *gewähren.*

c) Aufgabe zur Ratenzahlung

$K_6 = 30000;\ n = 6;\ \ p\,\% = 3{,}26\,\%$

$30000 = R \cdot (1{,}0326^6 + 1{,}0326^5 + 1{,}0326^4 + 1{,}0326^3 + 1{,}0326^2 + 1{,}0326)$

$30000 = R \cdot 6{,}723033187 \quad | \quad :6{,}723033187$

$R = 4462{,}27$

Klaus’ Bruder muss jährliche Raten von $4\,462{,}27$ € einzahlen.

d) Verdoppelung des Kapitals von Klaus:

$2 = 1{,}0485^n \quad | \quad log$

$log\,2 = n \cdot log(1{,}0485) \quad | \quad :log(1{,}0485)$

$n = 14{,}63$

Klaus‘ Kapital wird sich im $15.$ *Jahr verdoppeln.*

Lösung A13

a) $K_6 = 25000;\ \ n = 6\,J;\ \ p\,\% = 11{,}5\,\%$ Wertverlust.
Hinweis: Wegen „Wertverlust" ist mit $100\,\% - \ 11{,}5\,\% = 88{,}5\,\%$ zu rechnen.
$25000 = K_0 \cdot 0{,}885^6$ | $:0{,}885^6$
$K_0 = 52033{,}18$
Der Neupreis des Wohnmobils lag bei etwa $52\,033$ €.

b) $\frac{1}{8} = q^8$ | $\sqrt[8]{\ }$
$q = 0{,}7711$
$p\,\% = (1 - 0{,}7711) \cdot 100 = 22{,}9\,\%$
Der jährliche Wertverlust liegt bei $22{,}9\,\%$.

c) $400000 = 35000 \cdot 1{,}15^n$ | $:35000$
$11{,}42857143 = 1{,}15^n$ | log
$log(11{,}42857143) = n \cdot log(1{,}15)$ | $:log(1{,}15)$
$n = 17{,}43$
Im 18. *Jahr hat das Kunstwerk einen Wert von* $400\,000$ €.

Ohne Logarithmus:
$K_1 = 35000 \cdot 1{,}15 = 40250{,}00$
$K_2 = K_1 \cdot 1{,}15 = 46287{,}50$
$K_3 = K_2 \cdot 1{,}15 = 53230{,}63$
$K_4 = K_3 \cdot 1{,}15 \ldots$
… usw. bis
$K_{17} = K_{16} \cdot 1{,}15 = 376644{,}24$
$K_{18} = K_{17} \cdot 1{,}15 = 433140{,}87$

Lösung A14

a) $K_6 = 91132{,}50;\ \ n = 6;\ \ p\,\% = 3{,}8\,\%$
$91132{,}50 = K_0 \cdot 1{,}038^6$ | $:1{,}038^6$
$K_0 = 72860$
Lottogewinn:
$G = K_0 + 17540 = 72860 + 17540 = 90400$
Svenja hatte vor 6 *Jahren* $90\,400$ € *gewonnen.*

b) $K_6 = 90400 \cdot 1{,}038^6 = 113071{,}34$
Svenja hätte über $113\,071{,}34$ € *verfügen können.*

c) $120000 = 91132{,}50 \cdot 1{,}038^n$ | $:91132{,}50$
$1{,}316764052 = 1{,}038^n$ | log
$log(1{,}316764052) = n \cdot log(1{,}038)$ | $:log(1{,}038)$
$n = 7{,}38$
Svenja muss 8 *Jahre warten.*

Ohne Logarithmus:
$K_1 = 91132{,}50 \cdot 1{,}038 = 94595{,}54$
$K_2 = K_1 \cdot 1{,}038 = 98190{,}17$
$K_3 = K_2 \cdot 1{,}038 = 101921{,}39$
$K_4 = K_3 \cdot 1{,}038 \ldots$
… usw. bis
$K_7 = K_6 \cdot 1{,}038 = 118319{,}07$
$K_8 = K_7 \cdot 1{,}038 = 122815{,}20$

d) $2 = q^{10}$ | $\sqrt[10]{\ }$
$q = 1{,}072$
$p\,\% = (1{,}072 - 1) \cdot 100 = 7{,}2\,\%$
Svenjas Kapital verdoppelt sich in 10 *Jahren bei einem Zins von* $7{,}2\,\%$.

Prüfungsaufgaben Klasse 10 – Blatt 2

Lösung A15

$K_0 = 17200;\ \ n = 3;\ \ \ p\% = 5{,}5\ \%$ nach 3 Jahren Zuzahlung von $8800;\ \ n = 5;\ \ p\% = 5\%$, am Ende dann Zuzahlung von 1200.

a) $K_8 = (17200 \cdot 1{,}055^3 + 8800) \cdot 1{,}05^5 + 1200$

$K_8 = 38208{,}27$

Nach 8 Jahren liegen $38\,208{,}27$ € auf dem Konto.

b) $p_{Anz}\% = \frac{38208{,}27}{300000} \cdot 100 = 12{,}74\ \%$

Das Ehepaar kann $12{,}74\ \%$ der Bausumme anzahlen.

c) Ratensparvertrag:

$K_8 = 4000 \cdot (1{,}053^8 + 1{,}053^7 + 1{,}053^6 + 1{,}053^5 + 1{,}053^4 + 1{,}053^3 + 1{,}053^2 + 1{,}053)$

$K_8 = 35984{,}68$

Das Ehepaar hätte in diesem Falle $35\,984{,}68$ € auf dem Konto gehabt.

$p_{Anz}\% = \frac{35984{,}68}{300000} \cdot 100 = 12\ \%$

Das wären $12\ \%$ der Bausumme gewesen.

Lösung A16

a) $K_{18} = 30000;\ \ p\% = 5{,}5\ \%;\ \ \ n = 18$

$30000 = K_0 \cdot 1{,}055^{18} \qquad | \quad : 1{,}055^{18}$

$K_0 = 11443{,}98$

Das Vater muss $11\,443{,}98$ € zur Bank bringen.

b) $30000 = 10510 \cdot q^{18} \qquad | \quad : 10510$

$q^{18} = 2{,}854424358 \qquad | \quad \sqrt[18]{\ }$

$q = 1{,}06$

$p\ \% = (1{,}06 - 1) \cdot 100 = 6\ \%$

Das Institut rechnet mit $6\ \%$.

c) $K_{18} = (((3000 \cdot 1{,}052^4 + 3000) \cdot 1{,}052^4 + 3000) \cdot 1{,}052^4 + 3000) \cdot 1{,}052^6$

$K_{18} = 22618{,}63$

Der Tochter würden $22\,618{,}63$ € zur Verfügung stehen.