Aufgabe A1
Der Rentner Fritz Kluge hebt 12 Jahre lang von seinem Sparkonto am Jahresende $2\,400$ € ab und verfügt am Ende des 12. Jahres noch über ein Guthaben von $15\,049{,}12$ €.
Wie hoch war das Anfangsguthaben K_0 bei einem Zinssatz von $5{,}5\,\%$?

Aufgabe A2
Ein Sparguthaben von $8\,365$ € soll durch gleichmäßige Einzahlungen bis zum Ende des 5. Jahres auf $20\,000$ € anwachsen. Wie viele € sind jeweils am Jahresende bei einem Zinssatz von $4{,}5\,\%$ einzuzahlen?

Aufgabe A3
Frau Münch will ihr Sparguthaben von $11\,840$ € durch gleichgroße Einzahlungen bis zum Ende des 8. Jahres auf $30\,000$ € erhöhen. Die Zahlungen werden am Jahresanfang geleistet; der Zinssatz beträgt $5{,}25\,\%$.
Über wie viel € lautet eine Zahlung?

Aufgabe A4
Herr Weber verfügt über ein Sparguthaben von $25\,090$ €, das zu $6\,\%$ verzinst wird. Er möchte in den nächsten 10 Jahren jeweils am Jahresende einen gleich großen Betrag abheben. Das Guthaben soll aber am Ende des 10. Jahres noch $10\,000$ € betragen. Wie viel € kann Herr Weber jährlich abheben?

Aufgabe A5
Der in Ruhestand tretende Erich Gutekunst will sein Sparguthaben in Höhe von $38\,000$ € in den nächsten 15 Jahren durch gleich große Abhebungen aufbrauchen. Wie viel € kann er jeweils am Jahresende bis zum Ende des 15. Jahres abheben, wenn ein Zinssatz von $5{,}5$ % gewährt wird?

Aufgabe A6
Zu $15\,660$ € Sparguthaben sollen am Jahresende jeweils $6\,000$ € zugezahlt werden. Nach wie vielen Jahren übersteigt das Guthaben $50\,000$ €? Zinssatz: $3\,\%$.

Aufgabe A7
Berechne den nachschüssigen Rentenbarwert K_0 für R € Rente, $p\,\%$ Zinssatz und n Jahren Laufzeit.

a) $R = 7500\text{ €}, p\,\% = 5{,}5\,\%, n = 10$ b) $R = 4800\text{ €}, p\,\% = 6\,\%, n = 15$
c) $R = 9000\text{ €}, p\,\% = 5\,\%, n = 12$ d) $R = 2700\text{ €}, p\,\% = 6{,}5\,\%, n = 20$

Aufgabe A8
Berechne den vorschüssigen Rentenbarwert K_0 für R € Rente, $p\,\%$ Zinssatz und n Jahren Laufzeit.

a) $R = 15000\text{ €}, p\,\% = 7\,\%, n = 8$ b) $R = 7800\text{ €}, p\,\% = 6{,}5\,\%, n = 15$
c) $R = 3300\text{ €}, p\,\% = 7{,}5\,\%, n = 12$ d) $R = 5400\text{ €}, p\,\% = 5{,}5\,\%, n = 20$

Aufgabe A9

Wie viel € sind einmalig einzuzahlen, um davon 10 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres eine Rente von $10\,000$ € beziehen zu können? Zinssatz: $5{,}5$ %.

Aufgabe A10

Herr Knaus will einmalig so viele € einzahlen, dass er davon 15 Jahre lang am Anfang eines jeden Jahres eine Rente von $8\,000$ € beziehen kann. Welchen Betrag muss er bei einem Zinssatz von $6{,}75$ % anlegen?

Aufgabe A11

Aus einer Erbschaft soll 20 Jahre lang eine nachschüssige Rente von $6\,000$ € gezahlt werden. Der Erbe wünscht die sofortige Auszahlung seines Rentenanspruchs in einem Betrag. Wie viele € sind auszuzahlen, wenn mit $5{,}5$ % Jahreszinsen gerechnet wird?

Aufgabe A12

Von $80\,000$ € Erbschaft soll eine vorschüssige Rente, beginnend im ersten Jahr, gezahlt werden. Wie hoch ist die Rente bei $4{,}5$ % Jahreszinsen und einer Laufzeit von

a) 15 Jahren

b) 20 Jahren

Aufgabe A13

Aus $35\,000$ € angelegtem Kapital soll eine nachschüssige Rente von $4\,400$ € gezahlt werden. Die Verzinsung beträgt 7 %.
Wie viele Jahre kann man die Rente beziehen?

Aufgabe A14

Frau Günther will aus einem Erbschaftsanteil von $70\,000$ € eine vorschüssige Rente von $6\,300$ € beziehen. Wie viele Jahre lang erhält sie die Rente, wenn eine Verzinsung von $6{,}5$ % zugrunde liegt?

Aufgabe A15

Ein Kapital von $30\,000$ € wird mit $6{,}5$ % jährlich verzinst. Wie viele € können 12 Jahre lang

a) am Ende

b) am Anfang eines jeden Jahres

abgehoben werden, wenn das Kapital aufgebraucht werden soll?

Lösung A1

Gegeben: $K_{12} = 15049{,}12\ €$, $n = 12$, $R = 2400\ €$ nachschüssig, $p\ \% = 5{,}5\ \%$
Gesucht: K_0

$K_{12} = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q-1}$

$15049{,}12 = K_0 \cdot 1{,}055^{12} - \frac{2400 \cdot (1{,}055^{12} - 1)}{1{,}055-1}$

$15049{,}12 = 1{,}901207486 \cdot K_0 - 39325{,}42 \quad | \quad +39325{,}42$

$54374{,}54 = 1{,}901207486 \cdot K_0 \quad | \quad : 1{,}901207486$

$K_0 = 28600$

Das Anfangsguthaben betrug 28 600 €.

Lösung A2

Gegeben: $K_0 = 8365\ €$, $n = 5$, $K_5 = 20000\ €$, $p\ \% = 4{,}5\ \%$
Gesucht: R nachschüssig

$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q-1}$

$20000 = 8365 \cdot 1{,}045^5 + \frac{R \cdot (1{,}045^5 - 1)}{1{,}045-1}$

$20000 = 10424{,}31 + 5{,}47071 \cdot R \quad | \quad -10424{,}31$

$9575{,}69 = 5{,}47071 \cdot R \quad | \quad : 5{,}47071$

$R = 1750{,}36$

Am Jahresende sind jeweils 1 750,36 € *einzuzahlen.*

Lösung A3

Gegeben: $K_0 = 11840\ €$, $n = 8$, $K_8 = 30000\ €$, $p\ \% = 5{,}25\ \%$
Gesucht: R vorschüssig

$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q-1}$

$30000 = 11840 \cdot 1{,}0525^8 + \frac{R \cdot 1{,}0525 \cdot (1{,}0525^8 - 1)}{1{,}0525-1}$

$30000 = 17829{,}06 + 10{,}14075 \cdot R \quad | \quad -17829{,}06$

$12170{,}94 = 10{,}14075 \cdot R \quad | \quad : 10{,}14075$

$R = 1200{,}20$

Am Jahresanfang sind jeweils 1 200,20 € *einzuzahlen.*

Lösung A4

Gegeben: $K_0 = 25090\ €$, $n = 10$, $K_{10} = 10000\ €$, $p\ \% = 6\ \%$
Gesucht: R nachschüssig

$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q-1}$

$10000 = 25090 \cdot 1{,}06^{10} - \frac{R \cdot (1{,}06^{10} - 1)}{1{,}06-1}$

$10000 = 44932{,}37 - 13{,}180795 \cdot R \quad | \quad -44932{,}37$

$-34932{,}37 = -13{,}180795 \cdot R \quad | \quad : (-13{,}180795)$

$R = 2650{,}25$

Herr Weber kann jährlich 2 650,25 € *abheben.*

Lösung A5

Gegeben: $K_0 = 38000\,€$, $n = 15$, $K_{15} = 0\,€$, $p\,\% = 5{,}5\,\%$
Gesucht: R nachschüssig

$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$0 = 38000 \cdot 1{,}055^{15} - \frac{R\cdot(1{,}055^{15}-1)}{1{,}055-1}$

$0 = 84834{,}11 - 22{,}40866358 \cdot R \quad | \quad -84831{,}11$

$-84834{,}11 = -22{,}40866358 \cdot R \quad | \quad :(-22{,}40866358)$

$R = 3785{,}77$

Herr Gutekunst kann jährlich 3 785,77 € abheben.

Lösung A6

Gegeben: $K_0 = 15660\,€$, $R = 6000\,€$ nachschüssig, $K_n = 50000\,€$, $p\,\% = 6{,}5\,\%$
Gesucht: n

$K_n = K_0 \cdot q^n + \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1}$

$50000 = 15660 \cdot 1{,}03^n + \frac{6000\cdot(1{,}03^n-1)}{1{,}03-1}$

$50000 = 15660 \cdot 1{,}03^n + 200000 \cdot 1{,}03^n - 200000$

$50000 = 1{,}03^n \cdot (15660 + 200000) - 200000$

$50000 = 215660 \cdot 1{,}03^n - 200000 \quad | \quad +200000$

$250000 = 215660 \cdot 1{,}03^n \quad | \quad :215660$

$1{,}15923213 = 1{,}03^n \quad | \quad ln$

$ln(1{,}15923213) = n \cdot ln\,(1{,}03) \quad | \quad :ln\,(1{,}03)$

$n = 5$

Es müssen 5 Jahre lang jeweils am Jahresende 6 000 € eingezahlt werden.

Lösung A7

$K_0 \cdot q^n = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q-1} \quad | \quad :q^n$

$K_0 = \frac{R\cdot(q^n-1)}{q^n\cdot(q-1)}$

a) $K_0 = \frac{7500\cdot(1{,}055^{10}-1)}{1{,}055^{10}\cdot(1{,}055-1)} = 56532{,}19\,€$ b) $K_0 = \frac{4800\cdot(1{,}06^{15}-1)}{1{,}06^{15}\cdot(1{,}06-1)} = 46618{,}80\,€$

c) $K_0 = \frac{9000\cdot(1{,}05^{12}-1)}{1{,}05^{12}\cdot(1{,}05-1)} = 79769{,}26\,€$ b) $K_0 = \frac{2700\cdot(1{,}065^{20}-1)}{1{,}065^{20}\cdot(1{,}065-1)} = 29749{,}97\,€$

Lösung A8

$K_0 \cdot q^n = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q-1} \quad | \quad :q^n$

$K_0 = \frac{R\cdot q\cdot(q^n-1)}{q^n\cdot(q-1)}$

a) $K_0 = \frac{15000\cdot1{,}07\cdot(1{,}07^{8}-1)}{1{,}07^{8}\cdot(1{,}07-1)} = 95839{,}34\,€$ b) $K_0 = \frac{7800\cdot1{,}065\cdot(1{,}065^{15}-1)}{1{,}065^{15}\cdot(1{,}065-1)} = 78107{,}97\,€$

c) $K_0 = \frac{3300\cdot1{,}075\cdot(1{,}075^{12}-1)}{1{,}075^{12}\cdot(1{,}075-1)} = 27440{,}90\,€$ b) $K_0 = \frac{5400\cdot1{,}075\cdot(1{,}055^{20}-1)}{1{,}055^{20}\cdot(1{,}055-1)} = 68081{,}33\,€$

Lösung A9

Gegeben: $R = 10\,000$ € nachschüssig, $n = 10$, $p\,\% = 5{,}5\,\%$

Gesucht: K_0

$$K_0 \cdot q^n = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \qquad | \quad : q^n$$

$$K_0 = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)} = \frac{10000 \cdot (1{,}055^{10} - 1)}{1{,}055^{10} \cdot (1{,}055 - 1)} = 75376{,}26$$

Es sind 75 376,26 € *einmalig einzuzahlen.*

Lösung A10

Gegeben: $R = 8\,000$ € vorschüssig, $n = 15$, $p\,\% = 6{,}75\,\%$

Gesucht: K_0

$$K_0 \cdot q^n = \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \qquad | \quad : q^n$$

$$K_0 = \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)} = \frac{8000 \cdot 1{,}0675 \cdot (1{,}0675^{15} - 1)}{1{,}0675^{15} \cdot (1{,}0675 - 1)} = 79024{,}84$$

Es sind 79 024,84 € *einmalig einzuzahlen.*

Lösung A11

Gegeben: $R = 6\,000$ € nachschüssig, $n = 20$, $p\,\% = 5{,}5\,\%$

Gesucht: K_0

$$K_0 \cdot q^n = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \qquad | \quad : q^n$$

$$K_0 = \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)} = \frac{6000 \cdot (1{,}055^{20} - 1)}{1{,}055^{20} \cdot (1{,}055 - 1)} = 71702{,}29$$

Es sind 71 702,29 € *sofort auszuzahlen.*

Lösung A12

Gegeben: $K_0 = 80000$ €, $p\,\% = 4{,}5\,\%$

Gesucht: R vorschüssig

$$K_0 \cdot q^n = \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \qquad | \quad : q^n$$

$$K_0 = \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)}$$

a) $n = 15$

$$80000 = \frac{R \cdot 1{,}045 \cdot (1{,}045^{15} - 1)}{1{,}045^{15} \cdot (1{,}045 - 1)}$$

$$80000 = 11{,}222825 \cdot R \qquad | \quad : 11{,}222825$$

$$R = 7128{,}33$$

b) $n = 20$

$$80000 = \frac{R \cdot 1{,}045 \cdot (1{,}045^{20} - 1)}{1{,}045^{20} \cdot (1{,}045 - 1)}$$

$$80000 = 13{,}59329 \cdot R \qquad | \quad : 13{,}59329$$

$$R = 5885{,}26$$

Lösung A13

Gegeben: $K_0 = 35000$ €, $R = 4400$ € nachschüssig, $K_n = 0$ €, $p\,\% = 7\,\%$
Gesucht: n

$$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$
$$0 = 35000 \cdot 1{,}07^n - \frac{4400 \cdot (1{,}07^n - 1)}{1{,}07 - 1}$$
$$0 = 35000 \cdot 1{,}07^n - 62857{,}14 \cdot 1{,}07^n + 62857{,}14$$
$$0 = 1{,}07^n \cdot (35000 - 62857{,}14) + 62857{,}14$$
$$0 = -27857{,}14 \cdot 1{,}07^n + 62857{,}14 \quad | \quad -62857{,}14$$
$$-62857{,}14 = -27857{,}14 \cdot 1{,}07^n \quad | \quad :(-27857{,}14)$$
$$2{,}25641 = 1{,}07^n \quad | \quad ln$$
$$ln(2{,}25641) = n \cdot ln\,(1{,}07) \quad | \quad :ln\,(1{,}07)$$
$$n = 12$$

Die Rente kann 12 *Jahre lang bezahlt werden.*

Lösung A14

Gegeben: $K_0 = 70000$ €, $R = 6300$ € vorschüssig, $K_n = 0$ €, $p\,\% = 6{,}5\,\%$
Gesucht: n

$$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$
$$0 = 70000 \cdot 1{,}065^n - \frac{6300 \cdot 1{,}065 \cdot (1{,}065^n - 1)}{1{,}065 - 1}$$
$$0 = 70000 \cdot 1{,}065^n - 103223{,}08 \cdot 1{,}065^n + 103223{,}08$$
$$0 = 1{,}065^n \cdot (70000 - 103223{,}08) + 103223{,}08$$
$$0 = -33223{,}08 \cdot 1{,}065^n + 103223{,}08 \quad | \quad -103223{,}08$$
$$-103223{,}08 = -33223{,}08 \cdot 1{,}065^n \quad | \quad :(-33223{,}08)$$
$$3{,}106969 = 1{,}065^n \quad | \quad ln$$
$$ln(3{,}106969) = n \cdot ln\,(1{,}065) \quad | \quad :ln\,(1{,}065)$$
$$n = 18$$

Frau Günther kann die Rente 18 *Jahre lang beziehen.*

Lösung A15

Gegeben: $K_0 = 30000$ €, $n = 12$; $K_n = 0$ €, $p\,\% = 6{,}5\,\%$

a) Gesucht: R nachschüssig

$$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$
$$0 = 30000 \cdot 1{,}065^{12} - \frac{R \cdot (1{,}065^{12} - 1)}{1{,}065 - 1}$$
$$0 = 63872{,}89 - 17{,}37071141 \cdot R$$
$$17{,}37071141 \cdot R = 63872{,}89 \quad | \quad :17{,}37071141$$
$$R = 3677{,}06\ €$$

b) Gesucht: R vorschüssig

$$K_n = K_0 \cdot q^n - \frac{R \cdot q \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$
$$0 = 30000 \cdot 1{,}065^{12} - \frac{R \cdot 1{,}065 \cdot (1{,}065^{12} - 1)}{1{,}065 - 1}$$
$$0 = 63872{,}89 - 18{,}49980765 \cdot R$$
$$18{,}49980765 \cdot R = 63872{,}89 \quad | \quad :18{,}49980765$$
$$R = 3452{,}62\ €$$