Aufgabenblatt zu Urnenmodellen

Level 1 – Grundlagen – Blatt 2

Dokument mit 16 Aufgaben

Aufgabe A1

In einer Klasse von 25 Schülern soll für einen Wettbewerb eine Mannschaft von 5 Schülern gebildet werden. Da man sich nicht einigen kann, wird die Zusammen-setzung der Mannschaft per Los bestimmt. In einer Lostrommel befinden sich 5 Gewinnlose und 20 Nieten. Der Reihe nach zieht jeder ein Los, ohne es zunächst zu öffnen. Felix zieht zuerst, Max als Zweiter.

a) Wer hat die größere Chance, in die Mannschaft zu kommen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens einer der beiden in der Mannschaft?

Aufgabe A2

Bei einer Tombola verkauft eine Klasse 40 Lose. Unter diesen Losen sind 2 Haupt-gewinne, 13 Kleingewinne und der Rest Nieten. Felix ist der erste Käufer und zieht nacheinander zwei Lose. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

A: „Felix erhält eine Niete und einen Kleingewinn."

B: "Das zweite von Felix gezogene Los ist ein Hauptgewinn."

C: "Felix zieht höchstens einen Kleingewinn."

Aufgabe A3

In einer Klinik soll die Wirksamkeit eines neuen Medikaments getestet werden. Das Medikament wird in Packungen zu je 10 Tabletten an Patienten abgegeben. Man weiß, dass bei vielen Patienten auch Placebos (das sind Tabletten ohne Wirkstoff) die gleiche Wirkung haben wie die echten Tabletten. Daher wird in jeder Packung eine Tablette durch ein Placebo ersetzt.

a) Ein Patient entnimmt aus einer Packung nacheinander zwei Tabletten. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

A: "Nur die erste Tablette enthält das Medikament."

B: „Beide Tabletten enthalten das Medikament."

C: "Eine der beiden Tabletten ist das Placebo."

b) Eine weitere Packung ist äußerlich identisch mit den anderen, enthält aber zwei Placebos. Ein Patient bekommt beide Packungen. Er wählt eine der Packungen aus und entnimmt ihr eine Tablette.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält diese Tablette das Medikament?

Aufgabe A4

In einer Schachtel liegen vier Tischtennisbälle, drei davon sind gelb und einer weiß.

a) Man zieht zweimal nacheinander mit Zurücklegen einen Ball aus der Schachtel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die Bälle verschiedene Farben?

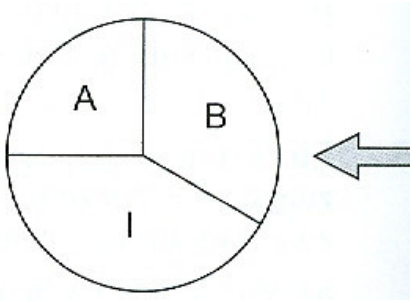
b) Max und Felix einigen sich auf folgendes Spiel:
Sie ziehen ohne Zurücklegen abwechselnd jeweils einen Ball aus der Schachtel. Wer zuerst den weißen Ball zieht, hat gewonnen.
Beide überlegen, ob es geschickt ist, den ersten Zug zu machen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabenblatt zu Urnenmodellen

Aufgabe A5

Ein Glücksrad ist mit den Beschriftungen A, B und I wie abgebildet versehen. Die Mittelpunktswinkel der entsprechenden Kreisausschnitte haben die Weiten $90\,°$, $120\,°$ und $150\,°$.

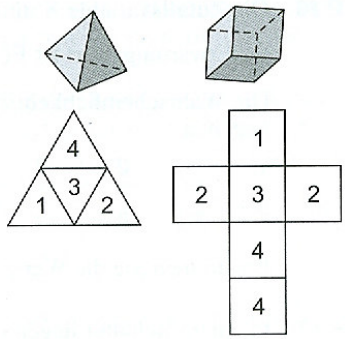


Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei drei Drehungen

a) die Buchstaben in der Reihenfolge ABI,
b) mindestens einmal den Buchstaben B,
c) die Buchstabenfolge AB erhält?

Aufgabe A6

Ein Tetraeder und ein Würfel werden gleichzeitig geworfen. Anders als beim Würfel gilt beim Tetraeder die Zahl als geworfen, die unten liegt. Die Seiten sind mit Zahlen wie in den Netzen abgebildet beschriftet.

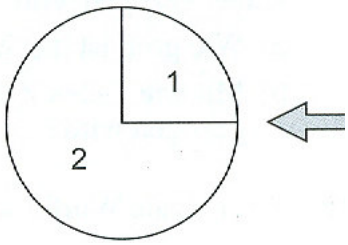


Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

A: "Man würfelt zwei ungerade Zahlen."
B: "Man erhält mindestens eine ungerade Zahl."
C: "Die Summe der Zahlen beträgt 6."
D: "Die Zahl auf dem Tetraeder ist kleiner als die auf dem Würfel."

Aufgabe A7

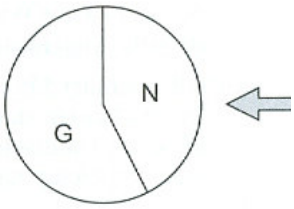
Das abgebildete Glücksrad wird zweimal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten dabei nur gleiche Ziffern auf?



Beschreibe, wie man das einmalige Drehen des Glücksrades mithilfe einer idealen Münze simulieren könnte.

Aufgabe A8

Ein Glücksrad hat zwei Sektoren, beschriftet mit den Buchstaben G und N. Die Wahrscheinlichkeit für den Buchstaben G bei einer Drehung ist p. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.



a) Bestimmen Sie für $p = \frac{1}{4}$ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
   A: "Es erscheinen verschiedene Buchstaben."
   B: "Mindestens einmal erscheint der Buchstabe G."
b) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einmal der Buchstabe N erscheint, ist $0{,}64$. Wie groß ist dann p?

Aufgabe A9

Eine Urne enthält drei schwarze Kugeln, zwei rote Kugeln und eine grüne Kugel.

a) Es werden nacheinander ohne Zurücklegen zwei Kugeln aus der Urne gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
   A: „Beide Kugeln haben verschiedene Farben."
   B: "Die zweite Kugel ist schwarz oder grün."
b) Aus der Urne werden nacheinander vier Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine rote Kugel dabei ist?

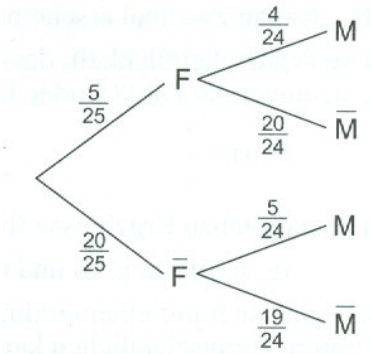
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Lösungslogik

a) Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
$F/\overline{F}$: Felix zieht ein/kein Gewinnlos.
$M/\overline{M}$: Max zieht ein/kein Gewinnlos.

b) Mindestens einer kommt in die Mannschaft ist das Gegenereignis zu „keiner von beiden kommt in die Mannschaft".



Klausuraufschrieb

a) Felix im ersten Zug Gewinnlos:
$P(F) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$
Max im zweiten Zug:
$P(M) = \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} + \frac{20}{25} \cdot \frac{5}{24} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.
Die Chance, in die Mannschaft zu kommen, ist für beide gleich groß.

b) A: „Mindestens einer kommt in die Mannschaft."
$\overline{A}$: „Keiner kommt in die Mannschaft."
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} = 1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30}$

Lösung A2

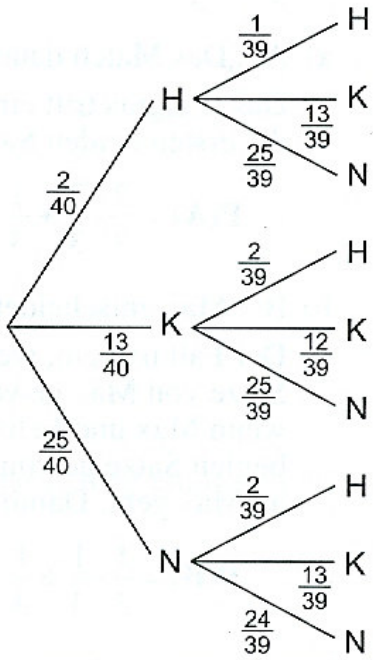
Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
H: Felix zieht einen Hauptgewinn.
K: Felix zieht einen Kleingewinn.
N: Felix zieht eine Niete.

A: „Felix erhält eine Niete und einen Kleingewinn."
Ereignisraum: (p_N, p_K); (p_K, p_N)

B: "Das zweite von Felix gezogene Los ist ein Hauptgewinn."
Ereignisraum: (p_H, p_H); (p_K, p_H); (p_N, p_H)

C: "Felix zieht höchstens einen Kleingewinn."
Ereignisraum: $(p_{\overline{K}}, p_{\overline{K}})$; $(p_K, p_{\overline{K}})$; $(p_{\overline{K}}, p_K)$
Das Gegenereignis ist $\overline{C}$: „Felix zieht zwei Kleingewinne.



Klausuraufschrieb

$P(A) = \frac{25}{40} \cdot \frac{13}{39} + \frac{13}{40} \cdot \frac{25}{39} = 2 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

$P(B) = \frac{2}{40} \cdot \frac{1}{39} + \frac{13}{40} \cdot \frac{2}{39} + \frac{25}{40} \cdot \frac{2}{39} = \frac{78}{1560} = \frac{1}{20}$

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{13}{40} \cdot \frac{12}{39} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A3

Lösungslogik

a) Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
b) Der erste Zug ist Ziehen einer Schachtel mit $p = 0{,}5$.

Klausuraufschrieb

a) $P(A) = \left(\frac{9}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{10} = 10\,\%$

$P(B) = \left(\frac{9}{10}\right) \cdot \left(\frac{8}{9}\right) = \frac{8}{10} = 80\,\%$

$P(C) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = 20\,\%$

b) $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} = \frac{17}{20} \approx 85\,\%$

Lösung A4

Lösungslogik

a) Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen. aufstellen des Ereignisraums.
b) Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen. aufstellen des Ereignisraums.

Klausuraufschrieb

a) Ereignisraum „unterschiedliche Farben": $(g,w);(w,g)$

$P\{(g,w);(w,g)\} = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

b) $P\left(Max_{weiß;1}\right) = \frac{1}{4}$

$P\left(Max_{gelb;1}, Felix_{weiß;2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

$P\left(Max_{gelb;1}, Felix_{gelb;2}, Max_{weiß;3}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot = \frac{1}{4}$

$P\left(Max_{gelb;1}, Felix_{gelb;2}, Max_{gelb;3}, Felix_{weiß;4}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4}$

$P(Max_{weiß}) = P\left(Max_{weiß;1}\right) + P\left(Max_{weiß;3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(Felix_{weiß}) = P\left(Felix_{weiß;2}\right) + P\left(Felix_{weiß;4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Es ist unwesentlich, wer das Spiel beginnt, da für beide Spieler die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ beträgt.

Lösung A5

Lösungslogik

a) Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Buchstaben sind proportional zum Kreisumfang ($360° \triangleq 100\,\%$).
b) Mindestens einmal der Buchstabe B ist das Gegenereignis zu kein mal der Buchstabe B.
c) Aufstellen des Ereignisraums.
Hinweis zum Ereignis (AB):
Zwar wird dreimal gezogen, sodass das Ereignis (AB) auftritt mit (ABA), (ABB) und (ABI), da hier jedoch im dritten Zug alle überhaupt möglichen Ereignisse vorkommen und $p_A + p_B + p_I = 1$ ist, braucht das Ereignis (AB) nur bis zum zweiten Zug betrachtet zu werden.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

a) $p_A = \frac{1}{4};\ p_B = \frac{1}{3};\ p_I = \frac{5}{12}$

$P(ABI) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{144}$

b) E: „mindestens einmal der Buchstabe B.„

$\overline{E}$: „kein mal der Buchstabe B.„

$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$

c) Ereignisraum: $(AB); (A; AB); (B; AB); (I, AB)$

$p = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12}\right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Lösung A6

Lösungslogik

a) und b)
Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.

c) Bei Würfelexperimenten lohnt es sich, eine Ereignistabelle aufzustellen. Der Ereignisraum ist nebenstehend in orange markiert.

d) Der Ereignisraum ist in der nebenstehenden zweiten Grafik orange markiert.

Wertigkeit jedes Ereignisses ist $\frac{1}{24}$

W/T	1	2	2	3	4	4
1	11	12	12	13	14	14
2	21	22	22	23	24	24
3	31	32	32	33	34	34
4	41	42	42	43	44	44

Wertigkeit jedes Ereignisses ist $\frac{1}{24}$

W/T	1	2	2	3	4	4
1	11	12	12	13	14	14
2	21	22	22	23	24	24
3	31	32	32	33	34	34
4	41	42	42	43	44	44

Klausuraufschrieb

a) $p_{ungerade_T} = \frac{1}{2};\ p_{ungerade_W} = \frac{1}{3}$

$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

b) $\overline{B}$: “keine ungerade Zahl”

$P(B) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

c) Ereignisraum: $(2,4);\ (2,4); (3,3);\ (4,2);\ (4,2)$

$P(C) = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{24}$

d) Ereignisraum: $(1,2);\ (1,2); (1,3);\ (1,4);\ (1,4)$
$(2,3);\ (2,4); (2,4)$
$(3,4);\ (3,4)$

$P(D) = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

Lösung A7

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.
Gesucht ist ein Zufallsexperiment mit einer Münze, bei dem das Ereignis A und sein Gegenereignis B mit den Wahrscheinlichkeiten $P(A) = \frac{1}{4}$ und $P(B) = \frac{3}{4}$ auftreten.

Klausuraufschrieb

Wertigkeit $P(1) = \frac{1}{4};\ P(2) = \frac{3}{4}$

Ereignisraum: $(1,1);\ (2,2)$

$p = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}$

Bei zweimaligem Wurf einer Münze gilt z.B. für das Ereignis $A = \{WW\}$

$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Für das Gegenereignis $B = \{WZ; ZW; ZZ\}$ gilt dann

$P(B) = 1 - P(A) = \frac{3}{4}$.

Interpretiert man das Ereignis A als Auftreten der 1 und B als Auftreten der 2 beim Glücksrad, so kann auf diese Weise eine Drehung des Glücksrades durch einen Doppelwurf einer idealen Münze simuliert werden.

Lösung A8

Lösungslogik

Die Wahrscheinlichkeit $P(G) = p$ ist gegeben. Dann ist $P(N) = 1 - p$.

Klausuraufschrieb

a) $P(G) = p;\ \ P(N) = 1 - p$

$P(A) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$

$P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16}$

b) N: „Mindestens einmal N„

$\overline{N}$: „Kein mal N„

$P\left(\overline{N}\right) = P(G)$

$P(N) = 1 - P(G) = 0{,}64$

$0{,}64 = 1 - p^2 \quad \Longrightarrow \quad p = 0{,}6$

Die Wahrscheinlichkeit für den Buchstaben G bei einer Drehung ist $0{,}6$.

Lösung A9

Lösungslogik

a) Ziehen ohne Zurücklegen, damit Veränderung der Einzelwahrscheinlichkeiten. Wir stellen jeweils den Ereignisraum auf.

b) Ziehen mit Zurücklegen, $B_{4;\frac{1}{3}}$-verteiltes Experiment mit $k = 1$.

Klausuraufschrieb

a) A: „Beide Kugeln haben unterschiedliche Farben"

$\overline{A}$: „Beide Kugeln haben gleiche Farben"

Ereignisraum für $\overline{A}$: $(ss);\ (rr)$

$p_{ss} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5};\ \ p_{rr} = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{11}{15}$

B: „Die zweite Kugel ist schwarz oder grün"

$\overline{B}$: „Die zweite Kugel ist rot"

Ereignisraum für $\overline{B}$: $(rr);\ (\overline{r}r)$

$p_{rr} = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

$p_{\overline{r}r} = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

$P(B) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{15} = \frac{2}{3}$

b) $B_{4;\frac{1}{3}}$-verteilt:

$B_{4;\frac{1}{3}}(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 4 \cdot \frac{8}{81} = \frac{32}{81}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de