Aufgabenblatt zur Binomialverteilung

Level 1 – Grundlagen – Blatt 1

Dokument mit 21 Aufgaben

Aufgabe A1

Hannah übt das Jonglieren mit drei Bällen. Dabei gelingen $75\,\%$ ihrer Versuche. Hannah probiert es achtmal.
Gib einen Term an für die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle Versuche gelingen.
b) kein Versuch gelingt.
c) mindestens sechs Versuche, aber nicht alle Versuche gelingen. Gehe dabei von dem Vorliegen einer Binomialverteilung aus.
d) Begründe, warum die Annahme einer Binomialverteilung kaum gerechtfertigt wäre, wenn Hannah 150 Versuche durchführen würde.

Aufgabe A2

Ein Laplace-Würfel wird mehrfach geworfen. Gib Ereignisse A, B und C an mit:

a) $P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^9$

b) $P(B) = 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^3$

c) $P(C) = \binom{14}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11}$

Aufgabe A3

Der Frühbus ist erfahrungsgemäß in $10\,\%$ der Fälle verspätet.

a) Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Bus fünf Tage lang stets pünktlich kommt.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit in Prozent dafür, dass der Bus an drei von fünf Tagen verspätet ist.

Aufgabe A4

a) Beweise, dass man die Funktionswerte der Binomialverteilung mit $n = 3$ und $p = 0{,}5$ erhält, indem man den entsprechenden Koeffizienten der dritten Zeile des Pascal-Dreiecks durch 8 dividiert.
b) Erstelle für diese Binomialverteilung eine Wertetabelle und ein Schaubild.

Aufgabe A5

Gegeben ist folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

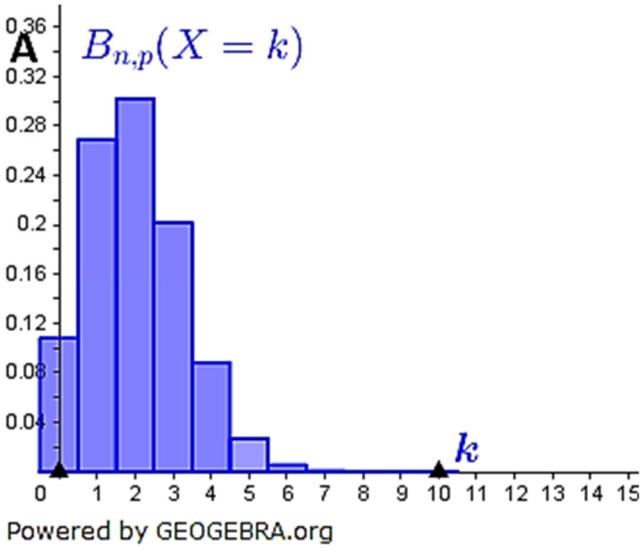
k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$10\,\%$	$20\,\%$	$15\,\%$	?	$10\,\%$	$15\,\%$	$20\,\%$

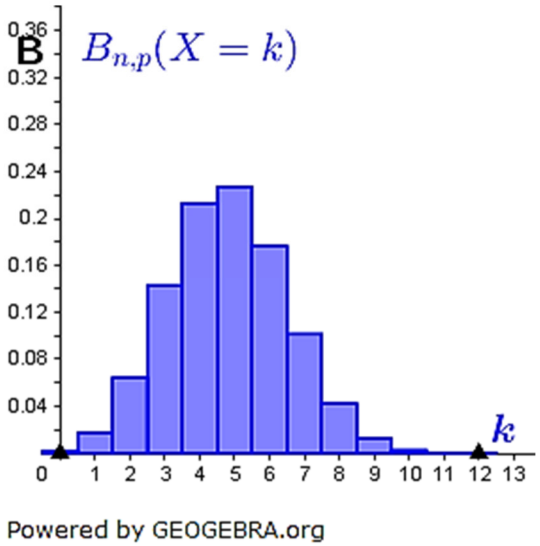
Bestimme $P(3)$ und $P(2 < X \leq 5)$.

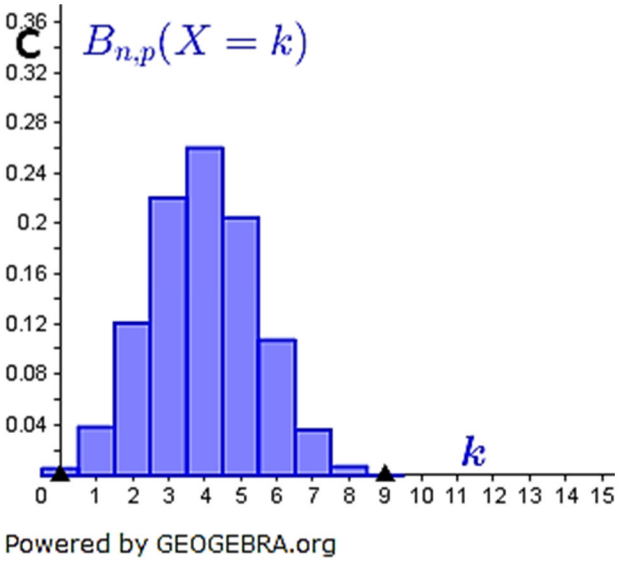
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

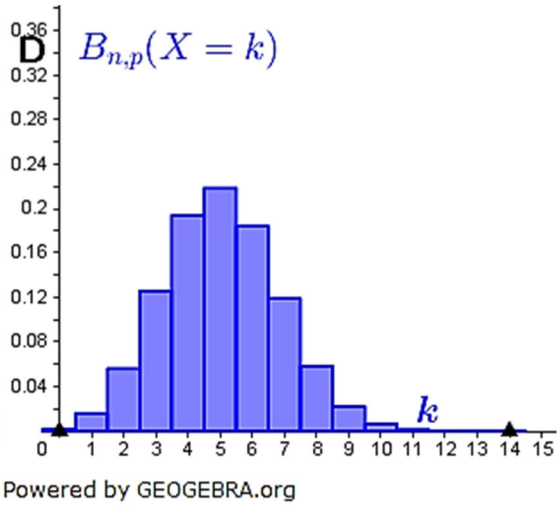
Aufgabe A6

Entscheide, welches der Schaubilder zu der Binomialverteilung mit $p = 0{,}4$ und $n = 12$ gehört. Begründe deine Antwort.



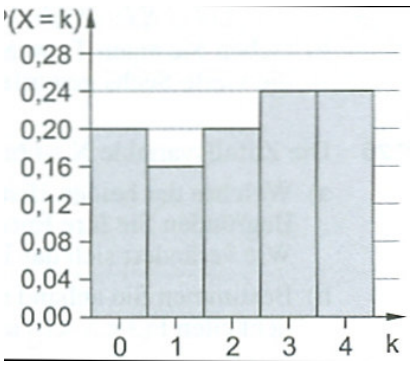






Aufgabe A7

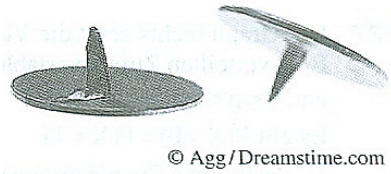
a) Begründe, dass die rechts abgebildete Graphik keine Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellen kann.



b) In einer Urne liegen 40 Kugeln. Zehn davon sind rot. Aus der Urne werden nacheinander acht Kugeln gezogen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der roten Kugeln unter den acht gezogenen Kugeln.
Ist X binomialverteilt, wenn die Ziehung:
(1) mit Zurücklegen
(2) ohne Zurücklegen erfolgt?
Begründe deine Antwort.

Aufgabe A8

Ein Reißnagel wird mehrfach geworfen. Dabei fällt er erfahrungsgemäß in $60\,\%$ der Würfe auf den Kopf, ansonsten auf die Seite. Gib die Ereignisse A, B, C und D an, für deren Wahrscheinlichkeit gilt:



$P(A) = \binom{30}{20} \cdot 0,6^{20} \cdot 0,4^{10}$

$P(B) = \binom{10}{0} \cdot 0,6^{0} \cdot 0,4^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,6^{1} \cdot 0,4^{9}$

$P(C) = \binom{8}{7} \cdot 0,6^{7} \cdot 0{,}4 + 0,6^{8}$

$P(D) = \binom{25}{10} \cdot 0,4^{10} \cdot 0,6^{15}$

Aufgabe A9

Ein idealer Würfel wird zehnmal geworfen.

a) Wähle die beiden Terme aus, welche die Wahrscheinlichkeit beschreiben, dass dabei genau viermal eine Sechs auftritt. Begründe deine Entscheidung.

(1) $\binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6$ (2) $\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6$ (3) $1 - \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$

(4) $\binom{10}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$ (5) $\binom{10}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4$ (6) $\binom{10}{4} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6$

b) Geben Sie einen Term an, der die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass im 10. Wurf die vierte Sechs geworfen wird.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Lösungslogik

a) und b)

Die Wahrscheinlichkeit für das Gelingen ist gegeben mit $p = \frac{3}{4}$.

c) Laut Aufgabentext soll von einer Binomialverteilung ausgegangen werden. Mindestens sechsmal Gelingen bedeutet 6, 7 und 8–maliges Gelingen. Da aber nicht alle Versuche gelingen sollen, fällt das letzte Gelingen 8 wieder weg.

Klausuraufschrieb

a) A: „Alle Versuche gelingen" $P(A) = \left(\frac{3}{4}\right)^8$

b) B: „Kein Versuch gelingt" $P(B) = \left(\frac{1}{4}\right)^8$

c) $P(X = 6) + P(X = 7) = \binom{8}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \binom{8}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1$

d) Bei 150 Versuchen kann man davon ausgehen, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit nicht konstant bleibt, da Hannah z.B. durch den Trainingseffekt immer besser bzw. durch Ermüdung immer schlechter wird. Jedenfalls wird die Erfolgswahrscheinlichkeit schwanken. Somit liegt keine Binomialverteilung vor.

Lösung A2

Lösungslogik

Es handelt sich um ein Laplace-Experiment. Jeder Wurf des Würfels hat die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$.

Zu b)

Hier ist das Gegenereignis beschrieben. Gegenereignisse werden in der Regel bei der Formulierung „mindestens" angewandt.

Klausuraufschrieb

a) A: „Es wird 9–mal keine 6 gewürfelt".

b) B: „Bei 3 Würfen wird mindestens einmal keine 6 gewürfelt".

c) C: „Bei 14 Würfen fällt genau dreimal eine 6".
Hinweis: Die Lösungen gelten alternativ auch für die Augenzahlen 1 bzw. 2, 3, 4 oder 5.

Lösung A3

Lösungslogik

Die Wahrscheinlichkeit für Verspätung beträgt $p = \frac{1}{10}$, somit ist die Wahrscheinlichkeit für pünktliches Erscheinen $p = \frac{9}{10}$.

Klausuraufschrieb

a) A: „Bus kommt 5 Tage lang pünktlich" $P(A) = \left(\frac{9}{10}\right)^5$

b) B: „Bus ist an 3 von 5 Tagen verspätet" $P(B) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2$

$P(B) = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^2 = 10 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}81 = 0{,}01 \cdot 0{,}81 = 0{,}0081 = 0{,}81\,\%$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A4

Lösungslogik

Die Einträge des Pascalschen Dreiecks haben die Form des Binomialkoeffizienten „k aus n", wobei n die Zeile und k die Spalte des Dreiecks angibt ($n, k \in \mathbb{N}; k \leq n$). In dem hier betrachteten Fall ist $n = 3$. Für $0 \leq k \leq 3$ ergibt sich der Funktionswert der entsprechenden Binomialverteilung für $p = 0{,}5$.

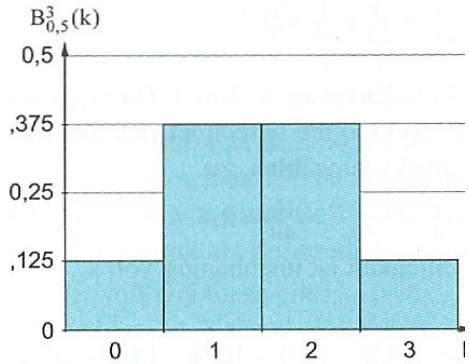
Klausuraufschrieb

a) $B_{3;0,5}(k) = \binom{3}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \binom{3}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \cdot \binom{3}{k}$

b) Die dritte Zeile des Pascalschen Dreiecks besteht aus den Einträgen 1, 3, 3 und 1. Es ergibt sich folgende Wertetabelle:

k	0	1	2	3
$B_{3;0,5}(k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Das Schaubild hat folgendes Aussehen:



Lösung A5

Klausuraufschrieb

Es gilt: $P(X = 3) = 100\% - 10\% - 20\% - 15\% - 10\% - 15\% - 20\% = 10\%$

$P(2 < X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 10\% + 10\% + 15\% = 35\%$

Lösung A6

Klausuraufschrieb

Schaubild B gehört zur Binomialverteilung $p = 0{,}4$ und $n = 12$. Wegen des Erwartungswertes mit $\mu = n \cdot p = 0{,}4 \cdot 12 = 4{,}8$ muss das Maximum bei $k = 5$ liegen. Schaubild C entfällt somit. Schaubild A ist achsensymmetrisch zur Geraden $x = 5$, dies ist nur bei $p = 0{,}5$ möglich. Schaubild D zeigt für $k = 13$ einen Wert ungleich Null. Die Binomialverteilung ist jedoch für $k > 12$ gar nicht definiert.

Lösung A7

Klausuraufschrieb

a) Bei einer Wahrscheinlichkeitsverteilung muss die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten stets gleich 1 sein. Die Addition der fünf dargestellten Werte für $k = 0; 1; 2; 3; 4$ ergibt:
$0{,}20 + 0{,}16 + 0{,}20 + 0{,}24 + 0{,}24 = 1{,}04$
Da dieser Wert größer als 1 ist, kann der abgebildete Graph keine Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) Dargestellt ist eine Bernoulli-Kette. Bei dieser
- gibt es bei jedem Zug nur zwei Ausgänge. Dies trifft hier in beiden Fällen zu. Betrachtet werden die beiden Ausgänge „rote Kugel", „keine rote Kugel".
- beeinflussen sich die einzelnen Züge nicht; die Wahrscheinlichkeit der beiden Ausgänge bleiben bei jedem Zug unverändert.

Vorgenanntes trifft nur im Fall (1) zu, die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel beträgt bei jedem Zug $0{,}25$.
Im Fall (2) gilt dies nicht, da die Gesamtanzahl der Kugeln nach jedem Zug ändert und damit auch die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel.
Somit ist nur im Fall (1) – Ziehen mit Zurücklegen – die Zufallsvariable X binomialverteilt (mit den Parametern $n = 8$ und $p = 0{,}25$, kurz $B_{4;0{,}25}$-verteilt).

Lösung A8

Klausuraufschrieb

A: „Der Reißnagel wird 30–mal geworfen und fällt 20–mal auf den Kopf."
B: „Der Reißnagel wird 10–mal geworfen und höchstens 1–mal auf den Kopf."
C: „Der Reißnagel wird 8–mal geworfen und fällt mindestens 7–mal auf den Kopf."
D: „Der Reißnagel wird 25–mal geworfen und fällt 10–mal auf die Seite."

Lösung A9

Klausuraufschrieb

a) (1) $B_{10;\frac{1}{6}}$-verteilt mit $P(X = 4)$ (genau 4–mal eine 6)
(5) $B_{10;\frac{5}{6}}$-verteilt mit $P(X = 6)$ (genau 6–mal keine 6)

b) Im 10. Wurf die vierte 6 heißt, dass in den 9 Würfen zuvor 3 6-en gefallen sind.
$B_{9;\frac{1}{6}}$-verteilt mit $k = 3$
$B_{9;\frac{1}{6}}(X = 3) = \binom{9}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6$
Im 10. Wurf eine 6:
$p = \binom{9}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} = \binom{9}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de