Aufgabe 1

Ein Jäger trifft sein Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit $40\,\%$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er bei zehn Schüssen

a) genau sechs Treffer

b) mehr als sechs Treffer?

Aufgabe 2

Bei einem Automaten gewinnt man in $30\,\%$ aller Spiele. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man

a) bei 10 Spielen mindestens einmal gewinnt?

b) bei 20 Spielen achtmal gewinnt?

Aufgabe 3

In einem "Nachrichtenkanal" wird ein Zeichen mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}9$ richtig übertragen. Eine Nachricht besteht aus acht Zeichen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden höchstens zwei Zeichen falsch übertragen?

Aufgabe 4

Ein fairer Würfel wird 36-mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augenzahl 6 in der erwarteten Anzahl eintritt.

Aufgabe 5

Eine Firma produziert einen bestimmten Massenartikel mit einem Ausschussanteil von $4\,\%$.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 100 zufällig ausgewählten Artikeln mindestens 2 und höchstens 6 Ausschussartikel befinden.

Aufgabe 6

Die Musikgesellschaft "Harmonie" führt ihr Jubiläumskonzert durch. In den Pausen werden Tombola-Lose angeboten. Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn ist $10\,\%$.

a) Fritz ist ein eifriger Loskäufer. 490 Lose hat er schon gekauft und 10 Gewinne erzielt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 90 Losen höchstens 10-mal gewinnt?

b) Hans hat schon 100 Lose gekauft und dabei 16 Gewinne eingestrichen. Er behauptet, er habe eben eine besonders begabte Hand. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt man ohne besondere Begabung auf mindestens 16 Treffer?

c) Die Besucher können auch Säckchen kaufen, die je 10 zufällig ausgewählte Lose enthalten. Der Veranstalter verspricht mindestens einen Gewinn, ansonsten wird das Geld zurückerstattet. Wie groß ist das Risiko, dass der Veranstalter zahlen muss?

Level 1 – Grundlagen – Blatt 3

Aufgabe 7

Wie oft muss man einen idealen Würfel mindestens werfen, wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit von

a) mehr als $90\,\%$ b) mehr als $99\,\%$

mindestens eine Sechs haben will?

Aufgabe 8

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 30$ und $p = 0{,}25$.
Berechne:

a) $P(X = 10)$ b) $P(X \leq 10)$ c) $P(X > 5)$

d) $P(15 < X < 25)$ e) den Erwartungswert von X

f) Für welchen Wert k wird $P(X = k)$ maximal?

g) Erstelle mit dem GTR mit Hilfe von 2 Listen eine Wertetabelle für die Zuordnung $k \longrightarrow P(X = k)$.

Aufgabe 9

Ein Spielwürfel mit den Augenzahlen 1 bis 6 wird 18-mal geworfen.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse. Gib die Ereignisse in Prozent an und runde auf eine Dezimale.

A: Es wird 6-mal eine Augenzahl gewürfelt, die größer als 4 ist.

B: Es wird mehr als 4-mal eine Augenzahl gewürfelt, die größer als 4 ist.

C: Es wird mindestens 4-mal aber höchstens 7-mal eine Augenzahl gewürfelt, die größer als 4 ist.

Aufgabe 26

In einer Fabrik werden die hergestellten Teile von einer Kontrolleurin überprüft, die jedes Teil mit einer Wahrscheinlichkeit von $97\,\%$ richtig beurteilt.

a) Ab welcher Anzahl von untersuchten Teilen ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kontrolleurin mindestens eines davon falsch beurteilt, größer als $99{,}9\,\%$?

b) Bei einer anderen Kontrolleurin liegt die Wahrscheinlichkeit, von 100 untersuchten Teilen mindestens drei falsch zu beurteilen, bei etwa $75\,\%$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beurteilt diese Kontrolleurin ein von ihr untersuchtes Teil falsch?
(Ergebnis in Prozent, auf eine Dezimale gerundet).

Aufgabe 10

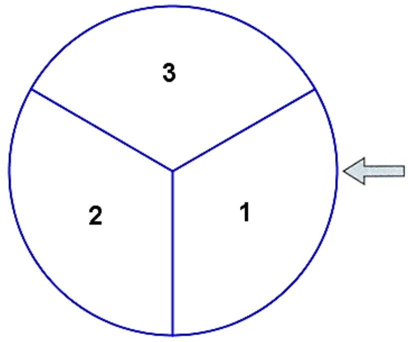
In einer Urne sind 400 schwarze und 600 weiße Kugeln.

a) Aus dieser Urne werden nacheinander 5 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
   A: Die fünf Kugeln haben dieselbe Farbe.
   B: Es sind mehr schwarze als weiße Kugeln.
   C: Die Kugel, die im vierten Zug gezogen wird, ist mindestens die dritte weiße Kugel.

b) Nun wird 100 –mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl der gezogenen schwarzen Kugeln um höchstens 5 vom Erwartungswert abweicht?

Aufgabe 11

Bei dem abgebildeten Glücksrad sind die Mittelpunktswinkel der Kreisausschnitte gleich groß. Das Glücksrad wird mehrfach gedreht und nach jeder Drehung wird die Zahl beim Pfeil notiert.



a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei vier Drehungen
- nur bei der letzten Drehung die Zahl 1,
- mindestens einmal die Zahl 1,
- genau zweimal die Zahl 1 und zwar bei direkt aufeinanderfolgenden Drehungen?

b) Das Glücksrad wird n-mal gedreht.
Für ein Ereignis A gilt:

$$P(A) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot b^3$$

Gib geeignete Werte für n, k und b an und beschreibe ein mögliches Ereignis A in Worten.

Lösung A1

Klausuraufschrieb

a) $B_{10;0,4}(X=6) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}1115 = 11{,}15\ \%$

b) $B_{10;0,4}(X>6) = 1 - B_{10;0,4}(X \leq 6) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}0548 \approx 5{,}5\ \%$

Lösung A2

Klausuraufschrieb

a) $B_{10;0,3}(X \geq 1) = 1 - B_{10;0,3}(X=0) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}9718 \approx 97{,}2\ \%$

b) $B_{20;0,3}(X=8) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}1144 \approx 11{,}4\ \%$

Lösung A3

Klausuraufschrieb

$B_{8;0,1}(X \leq 2) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}9619 \approx 96{,}2\ \%$

Lösung A4

Klausuraufschrieb

$E(X) = \mu = n \cdot p = 36 \cdot \frac{1}{6} = 6$

$B_{36;\frac{1}{6}}(X=6) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}1759 \approx 17{,}6\ \%$

Lösung A5

Lösungslogik

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl Ausschussartikel an.

Klausuraufschrieb

$B_{100;0,04}(2 \leq X \leq 6) = B_{100;0,04}(6 \leq X) - B_{100;0,04}(X \leq 1) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}8064 \approx 80{,}6\ \%$

Lösung A6

Klausuraufschrieb

a) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen Gewinne an.
$B_{90;0,1}$-verteilt.

$B_{90;0,1}(X \leq 10) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}7125 \approx 71{,}3\ \%$

b) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen Gewinne an.
$B_{100;0,1}$-verteilt.

$B_{100;0,1}(X \geq 16) = 1 - B_{100;0,1}(X \leq 15) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}03989 \approx 4\ \%$

c) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen Gewinne in einem Päckchen an.
$B_{10;0,1}$-verteilt.

$B_{10;0,1}(X=0) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}3487 \approx 35\ \%$

In 35 % aller Fälle muss der Veranstalter das Geld zurückzahlen.

Lösung A7

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gewürfelten Sechser an. Gesucht wird die Anzahl der erforderlichen Würfe, damit die Wahrscheinlichkeit für eine oder mehrere Sechsen zu würfeln $90\,\%$ oder mehr beträgt.

b) Die gleiche Logik wie bei a), nur dieses Mal mit $99\,\%$.

Klausuraufschrieb

a) $B_{n;\frac{1}{6}}(X \geq 1) = 1 - B_{n;\frac{1}{6}}(X = 0) \geq 0{,}9$

$n \overset{\text{GTR}}{=} 13$, denn $1 - B_{13;\frac{1}{6}}(X = 0) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}9065 \approx 90{,}7\,\%$

Lösungsweg ohne GTR:

$1 - B_{n;\frac{1}{6}}(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$1 -\cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}9 \;\Rightarrow\; \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1$ | ln (oder log)

$n \cdot ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0{,}1)$ | $:\ ln\left(\frac{5}{6}\right)$

$n \geq \frac{\ln(0{,}1)}{ln\left(\frac{5}{6}\right)} = 12{,}629$ | wegen $ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$ muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden.

Man muss mindestens 13 *mal würfeln.*

b) $B_{n;\frac{1}{6}}(X \geq 1) = 1 - B_{n;\frac{1}{6}}(X = 0) \geq 0{,}99$

$n \overset{\text{GTR}}{=} 26$, denn $1 - B_{26;\frac{1}{6}}(X = 0) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}99126 \approx 99{,}1\,\%$

Lösungsweg ohne GTR:

$1 - B_{n;\frac{1}{6}}(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$1 -\cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}99 \;\Rightarrow\; \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}01$ | ln (oder log)

$n \cdot ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0{,}01)$ | $:\ ln\left(\frac{5}{6}\right)$

$n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{ln\left(\frac{5}{6}\right)} = 25{,}25$ | wegen $ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$ muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden.

Man muss mindestens 26 *mal würfeln.*

Lösung A8

Klausuraufschrieb

a) $B_{30;0,25}(X = 10) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}0909 \approx 9{,}1\,\%$

b) $B_{30;0,25}(X \leq 10) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}8943 \approx 89{,}4\,\%$

c) $B_{30;0,25}(X > 5) = 1 - B_{30;0,25}(X \leq 5) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}7974 \approx 79{,}7\,\%$

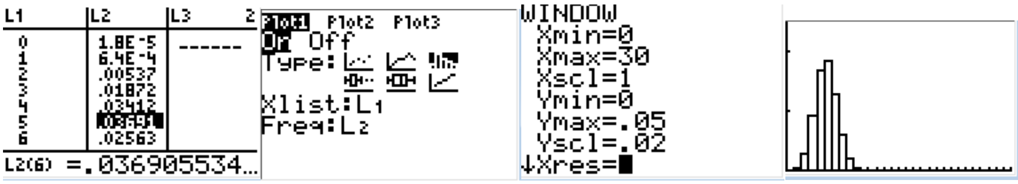
d) $B_{30;0,25}(15 \leq X \leq 25) = B_{30;0,25}(X \leq 25) - B_{30;0,25}(X \leq 14) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}0027 \approx 0{,}3\,\%$

e) $E(X) = \mu = n \cdot p = 30 \cdot 0{,}25 = 7{,}5$

f) $B_{30;0,25}(X = k)_{max} \approx 0{,}16624$ für $k = 7$

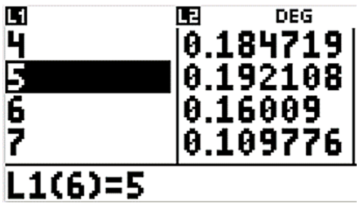
g) GTR-Lösung:

Erforderliche GTR-Eingaben (siehe Grafiken unten):
In die Liste L1 ist eine Wertetabelle von 0 bis 30 einzutragen.
Im Listeneditor im Kopf von L2 ist der Befehl $binompdf(30{,}1/6, L1)$ einzugeben. Nach Betätigung von ENTER werden die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten angezeigt.
Nun muss über 2ND STAT PLOT der Plotter eingeschaltet werden wie in der Grafik unten angezeigt.
Das Window ist wie unten angezeigt einzustellen.
Alle **Y**–Speicher müssen leer sein, dann wird durch GRAPH das Histogramm angezeigt.



g) WTR-Lösung:

Erforderliche WTR-Eingaben:
Mit zweimaligen Druck auf die data data -Taste lassen sich Listenspeicher $L1$ bis $L3$ über 4:Clear ALL leeren.
In die Liste $L1$ ist eine Wertetabelle von 0 bis 30 einzutragen.
Im Listeneditor im Kopf von $L2$ L1 0 L2 DEG ------- ist der Befehl 4:BinomialPdf zu hinterlegen. Nach der Eingabe der Parameter mit ausgewählter xLIST: L1 und SAVE TO: L1 L2 auf CALC gehen und dann enter drücken.
Der Rechner zeigt nun nach einiger Zeit eine Tabelle der Wahrscheinlichkeiten zu den einzelnen X-Werten an.
Die Anzeige eines Histogramms wie beim GTR ist mit dem WTR nicht möglich.



Lösung A9

Lösungslogik

Bei einem Würfel haben die Augenzahlen größer 4 die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$.

Klausuraufschrieb

A: $B_{18;\frac{1}{3}}(X = 6) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}1963 \approx 19{,}6\,\%$

B: $B_{18;\frac{1}{3}}(X > 4) = 1 - B_{18;\frac{1}{3}}(X \le 4) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}7689 \approx 76{,}9\,\%$

C: $B_{18;\frac{1}{3}}(4 \le X \le 7) = B_{18;\frac{1}{3}}(X \le 7) - B_{18;\frac{1}{3}}(X \le 3) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}6751 \approx 67{,}5\,\%$

Lösung A10

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Teile, die falsch beurteilt werden. Gesucht wird der Stichprobenumfang für den gilt:
$B_{n;0,03}(X \geq 1) > 0{,}999$.

b) Gesucht wird die Prozentzahl falsch beurteilter Teile der Kontrolleurin für den Stichprobenumfang $n = 100$ für den gilt:
$B_{100;p}(X \geq 3) \approx 0{,}75$.

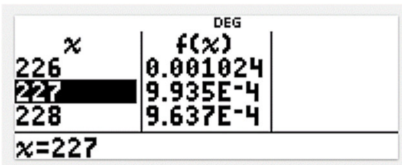
Klausuraufschrieb (GTR)

a) $B_{n;0,03}(X \geq 1) = 1 - B_{n;0,03}(X = 0) > 0{,}999$
$n \overset{GTR}{=} 227$, denn $1 - B_{227;0,03}(X = 0) = 0{,}999006$
Die Kontrolleurin muss mindestens 227 Teile beurteilen.

b) $B_{100;p}(X \geq 3) = 1 - B_{100;p}(X \leq 2) \approx 0{,}75$
$p \overset{GTR}{=} 0{,}0388$, denn $1 - B_{100;0,0388}(X \leq 2) = 0{,}7495$
Die Kontrolleurin beurteilt ein von ihr untersuchtes Teil mit einer Wahrscheinlichkeit von $3{,}9\ \%$ falsch.

Klausuraufschrieb (WTR)

a) $B_{n;0,03}(X \geq 1) = 1 - B_{n;0,03}(X = 0) > 0{,}999$
$-B_{n;0,03}(X = 0) > -0{,}001 \quad | \quad \cdot (-1)$
$B_{n;0,03}(X = 0) < 0{,}001$
Auflösung dieser Bernoulli-Formel:
$\binom{x}{0} \cdot 0{,}03^0 \cdot 0{,}97^x < 0{,}001$
WTR-Eingabe (siehe Grafiken rechts)
Über *table* 1:Add/Edit Func die Formel eingeben mit
f(x)=x nCr 5*0.03⁰*0.97ˣ und enter drücken.
Die Meldung g(x)= mit der enter-Taste übergehen.
Im TABLE SETUP einen geeigneten Startwert Start=226 und die Schrittweite Step=1 für X eingeben, bis zur CALC-Anzeige gehen, dann enter drücken.
Diesen Vorgang so lange wiederholen, bis die Tabelle einen X-Wert anzeigt mit der gesuchten zugeordneten Wahrscheinlichkeit.
Bei dieser Aufgabe ist dies für $X = 227$ der Fall mit einer Wahrscheinlichkeit erstmals $< 0{,}001$.



$n \overset{WTR}{=} 227$
Die Kontrolleurin muss mindestens 227 Teile beurteilen.

b) $B_{100;p}(X \geq 3) = 1 - B_{100;p}(X \leq 2) \approx 0{,}75$
$-B_{100;p}(X \leq 2) \approx -0{,}25 \qquad | \quad \cdot (-1)$
$B_{100;p}(X \leq 2) \approx 0{,}25$
Da der WTR keinerlei Möglichkeit bietet, den Prozentsatz p variabel anzugeben, ist hier nur noch ausprobieren möglich.
Die folgende Tabelle zeigt für verschiedene „ausprobierte" p die Wahrscheinlichkeiten $B_{100;p}(X \leq 2)$.

p	$B_{100;p}(X \leq 2)$	Kommentar
0,1	0,001944	Wert< 0,25
0,2	0,000000	Wert noch kleiner als bei $p = 0{,}1$ Der gesuchte Wert liegt somit bei $p < 0{,}1$.
0,05	0,118263	Wert< 0,25, der gesuchte Wert liegt somit bei $p < 0{,}05$
0,03	0,419275	Wert > 0,25, der gesuchte Wert liegt somit zwischen $0{,}03 < p < 0{,}05$
0,04	0,232143	Wert < 0,25, der gesuchte Wert liegt somit zwischen $0{,}03 < p < 0{,}04$
0,035	0,315907	Wert > 0,25, der gesuchte Wert liegt somit zwischen $0{,}035 < p < 0{,}04$ Ab hier nur noch 0,001er-Schritte
0,036	0,26788	
0,037	0,28002	
0,038	0,26328	
0,039	0,24732	Wir sind fast am Ziel
0,0385	0,2552	Wert ≈ 0,25, $p = 0{,}385$

$p \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}0385$, denn $1 - B_{100;0{,}0388}(X \leq 2) = 0{,}7448$
Die Kontrolleurin beurteilt ein von ihr untersuchtes Teil mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 3,9 % falsch.

Lösung A11

Lösungslogik

Die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel beträgt $\frac{600}{1000} = 0{,}6$.

a) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl gezogener weißer Kugeln an, für die gilt:
$B_{5;0{,}6}(X = 5)$.
Für Ereignis C: gilt:
In den ersten drei Zügen müssen mindestens zwei weiße Kugeln gezogen worden sein. Im vierten Zug muss eine weiße Kugel gezogen werden.

b) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl gezogener schwarzer Kugeln an mit einem Stichprobenumfang von $n = 100$ und einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}4$.
Bei $\mu = n \cdot p$ ist dann die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln zwischen 35 und 45 liegt.

Klausuraufschrieb

a) A: $B_{5;0,6}(X=5) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}07776 \approx 18\,\%$

B: $B_{5;0,6}(X \leq 2) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}31744 \approx 31{,}7\,\%$

C: $B_{3;0,6}(X \geq 2) = 1 - B_{3;0,6}(X \leq 1) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}648$

Weiße Kugel im vierten Zug:

$B_{3;0,6}(X \geq 2) \cdot 0{,}6 = 0{,}648 \cdot 0{,}6 = 0{,}3888$

b) $E(X) = \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}4 = 40$

$B_{100;0,4}(35 \leq X \leq 45) = B_{100;0,4}(X \leq 45) - B_{100;0,4}(X \leq 34) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}7386$

Lösung A12

Lösungslogik

a) Binomialverteilte Ereignisse mit $P(1) = \frac{1}{3}$ und $P(\overline{1}) = \frac{2}{3}$

nur letzte Drehung die Zahl 1:

- Dann muss vorher dreimal keine 1 gedreht worden sein.

Mindestens einmal die Zahl 1:

Das Gegenereignis ist viermal keine 1.

Genau zweimal die Zahl und zwar bei direkt aufeinanderfolgenden Drehungen:

Aufstellung des Ereignisraums und Berechnung der Wahrscheinlichkeit.

b) Identifizierung der Variablen n, k und b.

Klausuraufschrieb

a) $P(1) = \frac{1}{3}$; $P(\overline{1}) = \frac{2}{3}$

- $P(\textit{nur letzte Drehung die Zahl } 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$
- $P(\textit{mindestens einmal die Zahl } 1) = 1 - P(\overline{1}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{49}{81}$

Genau zweimal die Zahl 1 und zwar bei direkt aufeinanderfolgenden Drehungen:

- Ereignisraum: $E = \{(11\overline{1}\overline{1}); (\overline{1}11\overline{1}); (\overline{1}\overline{1}11)\}$

$P(E) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$

b) $n = 8$; $k = 5$; $b = \frac{2}{3}$

Das Glücksrad wird achtmal gedreht und die Zahl beim Pfeil notiert. $P(A)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 5–mal eine 1 (oder eine 2 oder eine 3) auftritt.