Lösung A1

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X für die Anzahl richtig beantworteter Fragen ist $B_{60;0,2}$ –verteilt.

b) Die Zufallsvariable X für die Anzahl richtig beantworteter Fragen ist $B_{60;0,2}$ –verteilt, gesucht wird k für $B_{60;0,2}(X \geq k) \leq 0{,}03$.

Klausuraufschrieb GTR

a) X für die Anzahl richtig beantworteter Fragen ist $B_{60;0,2}$ –verteilt.

$B_{60;0,2}(X \geq 16) = 1 - B_{60;0,2}(X \leq 15) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}1306 \approx 13{,}1\ \%$

Mit ca. $13{,}1\ \%$. Wahrscheinlichkeit besteht der ahnungs-lose Prüfling die Prüfung.

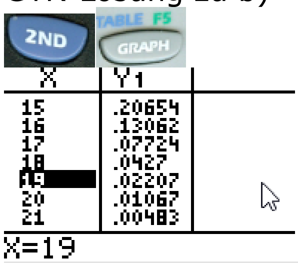
b) X ist nach wie vor $B_{60;0,2}$ –verteilt. Gesucht ist k für $B_{60;0,2}(X \geq k) \leq 0{,}03$.

$B_{60;0,2}(X \geq k) = 1 - B_{60;0,2}(X \leq k-1) \leq 0{,}03$

$k \overset{\text{GTR}}{=} 19$

Es müssen mindestens 19 richtige Antworten zum Bestehen der Prüfung verlangt werden.

GTR-Lösung zu b)



Klausuraufschrieb WTR

a) X für die Anzahl richtig beantworteter Fragen ist $B_{60;0,2}$ –verteilt.

$B_{60;0,2}(X \geq 16) = 1 - B_{60;0,2}(X \leq 15) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}1306 \approx 13{,}1\ \%$

Mit ca. $13{,}1\ \%$. Wahrscheinlichkeit besteht der ahnungs-lose Prüfling die Prüfung.

b) $1 - B_{60;0,2}(X \leq k-1) \leq 0{,}03$

$-B_{60;0,2}(X \leq k-1) \leq -0{,}97 \qquad | \quad \cdot(-1)$

$B_{60;0,2}(X \leq k-1) \geq 0{,}97$

Bestimmung des Startwertes von X für den WTR:

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{60 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} \approx 3$

Der $1{,}6\sigma$-Bereich liegt etwa bei $90\ \%$.

Somit – wegen Prüfung rechter Seite: $X_0 = \mu + 1{,}6\sigma = 16{,}8$

Wir starten mit $X_0 = 17$

$B_{60;0,2}(X \leq 17) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9573; \qquad B_{60;0,2}(X \leq 18) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9779$

Somit ist $B_{60;0,2}(X \leq 18)$ der gesuchte Wert.

$18 = k - 1 \qquad | \quad +1$

$k = 19$

Es müssen mindestens 19 richtige Antworten zum Bestehen der Prüfung verlangt werden.

Lösung A2

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der beschädigten Fliesen unter 20 Stück an. Die Zufallsvariable Y gibt die Anzahl der beschädigten Fliesen unter 50 Stück an. X ist $B_{20;0,1}$–verteilt, Y ist $B_{50;0,1}$–verteilt. Die Rücksendung erfolgt, wenn

I.) $B_{20;0,1}(X \geq 5)$ ist und im Falle $B_{20;0,1}(3 \leq X \leq 4)$ dass

II.) $B_{50;0,1}(Y \geq 6) \cdot B_{20;0,1}(3 \leq X \leq 4)$.

b) Gesucht ist k von Y für $B_{20;0,1}(X \geq 5) + B_{50;0,1}(Y \geq k) \cdot B_{20;0,1}(3 \leq X \leq 4) < 0{,}06$.

Klausuraufschrieb GTR

a) X gibt die Anzahl beschädigter Fliesen unter 20 an und ist $B_{20;0,1}$–verteilt.
Y gibt die Anzahl beschädigter Fliesen unter 50 an und ist $B_{50;0,1}$–verteilt.

$$p_R = B_{20;0,1}(X \geq 5) + B_{20;0,1}(3 \leq X \leq 4) \cdot B_{50;0,1}(Y \geq 6)$$
$$= 1 - B_{20;0,1}(X \leq 4) + \left(1 - B_{50;0,1}(Y \leq 5)\right) \cdot \left(B_{20;0,1}(X \leq 4) - B_{20;0,1}(X \leq 2)\right)$$
$$p_R \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}1506 \approx 15\,\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $15\,\%$ muss der Hersteller mit einer Rücksendung rechnen.

b) $$1 - B_{20;0,1}(X \leq 4) + \left(1 - B_{50;0,1}(Y \leq k-1)\right) \cdot \left(B_{20;0,1}(X \leq 4) - B_{20;0,1}(X \leq 2)\right) < 0{,}06$$
$$k \overset{\text{GTR}}{=} 9$$

In der zweiten Stichprobe müssen jetzt für eine Rücknahme der Sendung mehr als 8 defekte Fliesen gefordert werden.

X	Y1
5	.20238
6	.15062
7	.10749
8	.07736
9	.05937
10	.05004
11	.04579

X=9

Klausuraufschrieb WTR

a) X gibt die Anzahl beschädigter Fliesen unter 20 an und ist $B_{20;0,1}$–verteilt.
Y gibt die Anzahl beschädigter Fliesen unter 50 an und ist $B_{50;0,1}$–verteilt.

$$p_R = B_{20;0,1}(X \geq 5) + B_{20;0,1}(3 \leq X \leq 4) \cdot B_{50;0,1}(Y \geq 6)$$
$$= 1 - B_{20;0,1}(X \leq 4) + \left(1 - B_{50;0,1}(Y \leq 5)\right) \cdot \left(B_{20;0,1}(X \leq 4) - B_{20;0,1}(X \leq 2)\right)$$

$B_{20;0,1}(X \leq 4) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9568$ $\quad B_{50;0,1}(Y \leq 5) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}6161$ $\quad B_{20;0,1}(X \leq 2) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}6769$

$$p_R = 1 - 0{,}9568 + (1 - 0{,}6161) \cdot (0{,}9568 - 0{,}6769)$$
$$p_R \approx 0{,}1506 \approx 15\,\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $15\,\%$ muss der Hersteller mit einer Rücksendung rechnen.

b) $1 - B_{20;0,1}(X \leq 4) + \left(1 - B_{50;0,1}(Y \leq k-1)\right) \cdot \left(B_{20;0,1}(X \leq 4) - B_{20;0,1}(X \leq 2)\right) < 0{,}06$

$B_{20;0,1}(X \leq 4) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9568 \qquad B_{20;0,1}(X \leq 2) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}6769$

$1 - 0{,}9568 + \left(1 - B_{50;0,1}(Y \leq k-1)\right) \cdot (0{,}9568 - 0{,}6769) < 0{,}06$

$0{,}0432 + \left(1 - B_{50;0,1}(Y \leq k-1)\right) \cdot 0{,}2799 < 0{,}06$

$\left(1 - B_{50;0,1}(Y \leq k-1)\right) \cdot 0{,}2799 < 0{,}06 - 0{,}0432$

$1 - B_{50;0,1}(Y \leq k-1) < 0{,}06$

$-B_{50;0,1}(Y \leq k-1) < -0{,}94 \qquad | \quad \cdot(-1)$

$B_{50;0,1}(Y \leq k-1) > 0{,}94$

Bestimmung des Startwertes von X für den WTR:

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{50 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} \approx 2$

Der $1{,}5\sigma$-Bereich liegt etwa bei $90\,\%$.

Somit – wegen Prüfung rechter Seite: $X_0 = \mu + 1{,}5\sigma = 7$

Wir starten mit $X_0 = 7$

$B_{50;0,1}(Y \leq 7) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}8778$

$B_{50;0,1}(Y \leq 8) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9421 > 0{,}94$

$k \overset{\text{WTR}}{=} 8$

In der zweiten Stichprobe müssen jetzt für eine Rücknahme der Sendung mehr als 8 *defekte Fliesen gefordert werden.*

Lösung A3

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Personen mit Blutgruppe A an und ist $B_{50;0,43}$–verteilt.

b) Aufstellung der Einzelereignisse und Berechnung der Wahrscheinlichkeiten.

Klausuraufschrieb

a) Die Anzahl der Personen in der Gruppe kann deshalb mit einer binomialverteilten Zufallsvariablen beschrieben werden, weil sich der genannte Prozentsatz von $43\,\%$ auf die gesamte Bevölkerung der BRD bezieht und empirisch erhoben wurde. Damit hat jede Untermenge von der Gesamtmenge dieselbe Wahrscheinlichkeit.

$P(E) = B_{50;0,43}(X = 20) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}1044$

$P(F) = B_{50;0,43}(X > 25) = 1 - B_{50;0,43}(X \leq 25) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}1269$

In der Gruppe haben etwa $10{,}4\,\%$ *genau die Blutgruppe* A.

Die Wahrscheinlichkeit für mehr als 25 *Personen mit Blutgruppe* A *beträgt etwa* $12{,}7\,\%$.

b) Die Zufallsvariable Y gibt die Anzahl der geheilten Patienten der Blutgruppe A, sie ist $B_{8;0,9}$-vertelt. Die Zufallsvariable Z die Anzahl der geheilten Patienten der Blutgruppe B an, sie ist $B_{2;0,7}$-verteilt.

G: „Alle zehn Patienten werden geheilt.“

$P(G) = B_{8;0,9}(Y = 8) \cdot B_{2;0,7}(X = 2) = 0{,}9^8 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}2109 \approx 21{,}1\,\%$

H: „Mindestens neun Patienten werden geheilt."
Der Ereignisraum ist $\Omega = \{(8Y; 2Z); (8Y; 1Z); (7Y; 2Z)\}$
$P(H) = P(G) + B_{8;0,9}(Y = 8) \cdot B_{2;0,7}(X = 1) + B_{8;0,9}(Y = 7) \cdot B_{2;0,7}(X = 2)$
$P(H) = 0{,}2109 + \binom{8}{8} 0{,}9^8 \cdot \binom{2}{1} \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + \binom{8}{7} \cdot 0{,}9^7 \cdot 0{,}1 \cdot \binom{2}{2} \cdot 0{,}7^2$
$= 0{,}2109 + 0{,}9^8 \cdot 2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}9^7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}5792 \approx 57{,}92\ \%$
Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Personen geheilt werden beträgt etwa $21\ \%$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 9 *Patienten geheilt werden, beträgt etwa* $58\ \%$.

Lösung A4

a) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl kontrollierter RWK-Fans, die Alkohol dabei haben, an und ist $B_{4;0,20}$–verteilt.

$P(A) = B_{4;0,2}(X \geq 1) = 1 - B_{4;0,2}(X = 0) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}5904 \approx 59\ \%$

$P(B) = B_{4;0,2}(X = 2) = \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}1536 \approx 15{,}4\ \%$

Es ist nach „keinem Alkohol" gefragt, damit ist X $B_{4;0,8}$-verteilt.

$P(C) = B_{4;0,8}(X \leq 1) = \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}0272 \approx 2{,}7\ \%$

b) Aufstellung einer stochastischen Matrix:

	Mit Alkohol	Ohne Alkohol	Summe
Neutral	$0{,}024$	$0{,}196$	$0{,}22$
TuS-Fan	$0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$	$0{,}27$	$0{,}30$
RWK-Fan	$0{,}2 \cdot 0{,}48 = 0{,}096$	$0{,}384$	$0{,}48$
Summe	$0{,}15$	$0{,}85$	$1{,}0$

In der Aufgabenstellung verbirgt sich implizit die Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit. Exakter formuliert wäre „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zufällig ausgewählte Person Alkohol dabei hat unter der Bedingung, dass sie eine neutrale Person ist." Hierfür gilt:
$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ mit A: „Die Person ist eine neutrale Person" und B: „Die Person hat Alkohol dabei". Damit ergibt sich:
$P_A(B) = \frac{0{,}024}{0{,}22} = 0{,}1090 = 10{,}9\ \%$
Ähnliches gilt für die Formulierung „…dass von allen Personen, die Alkohol dabei haben, eine zufällig ausgewählte Person ein TuS-Fan ist". Exakter formuliert wäre „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zufällig ausgewählte Person ein TuS-Fan ist unter der Bedingung, dass sie Alkohol dabei hat." Hierfür gilt ebenfalls:
$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ mit A: „Die Person hat Alkohol dabei" und B: „Die Person ist TuS-Fan". Damit ergibt sich:
$P_A(B) = \frac{0{,}03}{0{,}15} = 0{,}2 = 20\ \%$

c) D: „Mindestens zwei Fans der TuS-Gruppe, die Alkohol dabei haben."
$P(D) = B_{n;0,1}(X \geq 2) = 1 - B_{n;0,2}(X \leq 1) > 0{,}6$
$1 - B_{n;0,2}(X \leq 1) = 1 - \left(\binom{n}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^n + \binom{n}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{n-1}\right) > 0{,}6$
$1 - (0{,}9^n + n \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{n-1}) = 1 - (0{,}9^n - 0{,}1 \cdot n \cdot 0{,}9^{n-1}) > 0{,}6$
$0{,}6 < 1 - (0{,}9^n - 0{,}1 \cdot n \cdot 0{,}9^{n-1}) \neq\ 1 - (0{,}9^n - 0{,}9^{n-1} \cdot 0{,}1)$

Begründung:
In der gegebenen Ungleichung wurde die Auflösung des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{1} = n$ *vergessen.*

Lösung A5

Klausuraufschrieb

a) Aufstellung einer stochastischen Matrix:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{20}{40} = 0{,}5$	$\frac{10}{40} = 0{,}25$	$\frac{6}{40} = 0{,}15$	$\frac{4}{40} = 0{,}1$

$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}1 = 0{,}001875 \approx 0{,}2\,\%$
$P(B) = 4! \cdot P(A) = 24 \cdot 0{,}001875 = 0{,}045 = 4{,}5\,\%$
Für $P(C)$ formen wir um in ein Bernoulli-Experiment mit $P(X = 3) = \frac{1}{10}$ und $P(X = \overline{3}) = \frac{9}{10}$.

$$P(C) = B_{4,01}(X \geq 2) = 1 - B_{4,01}(X \leq 1) = 1 - \left(\binom{4}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 + \binom{4}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3\right)$$
$$= 1 - (0{,}9^4 + 4 \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3) = 1 - 0{,}9477 = 0{,}0523 = 5{,}23\,\%$$

Ereignisraum von D:
$\Omega = \{(3;3;3;3), (3;3;3;2), (3;3;2;3), (3;2;3;3), (2;3;3;3;)\}$
$P(D) = 0{,}1^4 + 4 \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}15 = 0{,}0007 = 0{,}07\,\%$

b) Der Spieler, der seine vier Versuche ausschöpft, muss somit in den ersten drei Drehungen entweder die 0 oder die 1 erhalten und in der vierten Drehung die 2 oder die 3.
0 oder die 1 haben die Wahrscheinlichkeit $0{,}75$.
$P(4\,Versuche) = 0{,}75^3 = 0{,}4219 \approx 42{,}2\,\%$
Hinweis: Das Ergebnis der vierten Drehung spielt keine Rolle mehr.

c) Gesucht ist der Erwartungswert aus 4 Drehungen.

1. Möglichkeit:
Das Ergebnis "0" wird notiert, wenn in den ersten drei Drehungen 0 oder 1 gedreht wird und in vierten Drehung 0 ist.
$P(Ergebnis = "0") = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{128}$

2. Möglichkeit:
Das Ergebnis "1" wird notiert, wenn in den ersten drei Drehungen 0 oder 1 gedreht wird und in vierten Drehung 1 ist.
$P(Ergebnis = "1") = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{256}$

3. Möglichkeit:
Das Ergebnis "2" wird notiert, wenn:
Beim ersten Mal wird 2 gedreht: $\frac{6}{40}$
Zunächst 0 oder 1 dann 2: $\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{40} = \frac{18}{160}$
Zunächst zweimal 0 oder 1 dann 2: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{6}{40} = \frac{27}{320}$
Zunächst dreimal 0 oder 1 dann 2: $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{6}{40} = \frac{81}{1280}$
$P(Ergebnis = "2") = \frac{6}{40} + \frac{18}{160} + \frac{27}{320} + \frac{81}{1280} = \frac{105}{256}$

<u>4. Möglichkeit:</u>
Das Ergebnis "3" wird notiert, wenn:
Beim ersten Mal wird 3 gedreht: $\frac{1}{10}$
Zunächst 0 oder 1 dann 3: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{40}$
Zunächst zweimal 0 oder 1 dann 3: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{160}$
Zunächst dreimal 0 oder 1 dann 3: $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{27}{640}$
$P(Ergebnis = "3") = \frac{1}{10} + \frac{3}{40} + \frac{9}{160} + \frac{27}{640} = \frac{35}{128}$
Erwarteter Zahlenwert $E(X)$:
$0 \cdot \frac{27}{128} + 1 \cdot \frac{27}{256} + 2 \cdot \frac{105}{256} + 3 \cdot \frac{35}{128} = 1{,}746$
Der Spieler erreicht im Durchschnitt mit dieser Strategie den Zahlenwert $1{,}746$.