Aufgabe A1

Ein Glücksrad hat vier Sektoren, wovon die ersten beiden die Winkelgröße $\alpha = \beta = 60\,°$ haben. Für die Winkelgrößen γ und δ des dritten und vierten Sektors gilt $\gamma = \delta$.

a) Bestimme γ und gib die Wahrscheinlichkeit $P(\gamma)$ an, mit der das Rad so zu stehen kommt, dass der Pfeil in den dritten Sektor zeigt.

b) Bei $3{,}00\,€$ Einsatz erhält man Auszahlungen gemäß folgender Tabelle:

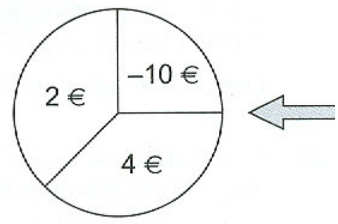
α	β	γ	δ
$1{,}00\,€$	$2{,}00\,€$	$3{,}00\,€$	$4{,}00\,€$

Bestimme den Gewinnerwartungswert. Entscheide, ob das Spiel fair ist.

Aufgabe A2

Für den Erwartungswert einer Zufallsvariablen X findet man die Formel

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \cdots + x_n P(X = x_n)$$



a) Erkläre die einzelnen Elemente dieser Formel. Welche Aussage macht der Erwartungswert?

b) Erläutere den Erwartungswert an einem Beispiel unter Verwendung des abgebildeten Glücksrades.

Aufgabe A3

Felix will auf einem Fest ein Spiel mit einem Glücksrad anbieten, bei dem das Rad einmal gedreht wird. Um seinen Gewinn zu kalkulieren, führt er folgende Rechnung durch: $3€ \cdot \frac{1}{4} + 1\,€ \cdot \frac{1}{3} - 2\,€ \cdot \frac{1}{6} - 1\,€ \cdot \frac{1}{4} = 0{,}50\,€$

a) Wie könnte das Glücksrad aussehen?

b) Nenne eine mögliche Gewinnregel für die Spieler des Spiels, wenn Felix einen festen Einsatz pro Spiel verlangen will.

Aufgabe A4

Die Zufallsvariable X nimmt die Werte 0, 2, 6 und 10 an. Ihr Erwartungswert ist $E(X) = \frac{23}{6}$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X ist durch die folgende Tabelle gegeben:

x_i	0	2	6	10
$P(X = x_i)$	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	b

Bestimme die Werte für a und b.

Aufgabe A5

In einem Behälter liegen eine rote und vier schwarze Kugeln. Man nimmt so lange ohne Zurücklegen eine Kugel aus dem Behälter, bis die rote Kugel gezogen wird.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man höchstens dreimal ziehen muss?

b) Mit wie vielen Ziehungen muss man durchschnittlich rechnen, bis die rote Kugel gezogen wird?

Aufgabe A6

Zwei ideale Würfel werden gleichzeitig geworfen.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
   A: „Genau ein Würfel zeigt eine 6"
   B: "Die Augenzahlen unterscheiden sich um 4"

b) Felix schlägt Max folgendes Spiel vor:
   Unterscheiden sich die Augenzahlen der beiden Würfel um 4 oder 5, so bekommt Max den Unterschied in Spielchips ausgezahlt. In allen anderen Fällen muss er einen Spielchip an Felix zahlen. Ist das Spiel fair?

Aufgabe A7

Bei einem Glücksspiel wird eine ideale Münze geworfen. Liegt nach einem Wurf Wappen oben, so endet das Spiel. Andernfalls wird die Münze wieder geworfen, jedoch höchstens dreimal.
Als Gewinn erhält man:
   1 € bei Wappen im ersten Wurf;
   2 € bei Wappen im zweiten Wurf;
   4 € bei Wappen im dritten Wurf.
Der Einsatz bei dem Spiel beträgt $1{,}50$ €. Ist das Spiel fair?

Aufgabe A8

Einem Kartenspiel entnimmt man aus jeder der Farben Kreuz, Pik, Herz und Karo die Karten mit den Werten 7, 8, 9 und 10. Mit den entnommenen Karten wird folgendes Spiel gespielt:
Die Karten werden gemischt und ein Spieler zieht zufällig drei Karten. Sind die Karten von gleicher Farbe, erhält er 15 €. Haben die Karten den gleichen Wert, erhält er a €. In allen anderen Fällen muss er 1 € zahlen.
Für welchen Wert für a ist das Spiel fair?

Hinweis

Bei Aufgaben mit dem Erwartungswert wird empfohlen, unmittelbar eine Tabelle der x_i und $P(X = x_i)$ anzulegen.

Lösung A1

Lösungslogik

a) Da α und β jeweils $60\,°$ sind, stehen für γ und δ noch $360\,° - 120° = 240°$ zur Verfügung. Da $\gamma = \delta$ ist somit $\gamma = \frac{240}{2} = 120\,°$. Der dritte Sektor wird vom Winkel γ dargestellt mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$.

b) Es ist der Gewinnerwartungswert zu berechnen. Ist dieser Wert gleich dem Einsatz, so ist das Spiel fair.

Klausuraufschrieb

a) $360\,° - \alpha - \beta = \gamma + \delta$
$\gamma + \delta = 240\,°$
Wegen $\gamma = \delta$ somit $\gamma = \frac{240}{2} = 120\,°$.
$P(dritter\ Sektor) = P(\gamma) = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$

b)

α	β	γ	δ
1,00 €	2,00 €	3,00 €	4,00 €
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$
$\frac{1}{6}$ €	$\frac{2}{6}$ €	$\frac{6}{6}$ €	$\frac{8}{6}$ €

$E(X) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{6}{6} + \frac{8}{6} = \frac{17}{6} \approx 2{,}83$
Wegen $E(X) \neq 3{,}00$ ist das Spiel nicht fair.

Lösung A2

Klausuraufschrieb

a) In der Formel bedeuten die x_i die möglichen Werte der Zufallsvariablen X und $P(X = x_i)$ die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.
Der Erwartungswert $E(X)$ gibt an, welcher Wert durchschnittlich bei einer großen Zahl von Durchführungen des Zufallsexperimentes zu erwarten ist.

b) Man könnte mit dem Glücksrad folgendes Glücksspiel durchführen:
Das Glücksrad wird einmal gedreht. Zeigt der Zeiger auf einen positiven Geldbetrag, so wird dieser dem Spieler ausgezahlt, ansonsten muss er 10 € zahlen.
$P(-10\,€) = \frac{1}{4}$; $P(2\,€) = \frac{3}{8}$; $P(4\,€) = \frac{3}{8}$. Die Zufallsvariable X, die den Gewinn des Spielers beschreibt, hat daher folgende Wahrscheinlichkeits-verteilung:

x_i	2 €	4 €	-10 €
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

Der Erwartungswert von X ist (s. Formel in der Aufgabenstellung):
$E(X) = 2 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} - 10 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$
Wird dieses Spiel sehr häufig gespielt, so muss der Spieler mit einem mittleren Verlust von $0{,}25$ € pro Spiel rechnen.

Lösung A3

Lösungslogik

a) Die Aufgabe beschreibt vier unterschiedliche $P(X = x_i)$, die auf einem Glücksrad verteilt sind. Wir bestimmen damit die Mittelpunktswinkel des Glücksrades.

b) Wir stellen eine Tabelle der x_i und $P(X = x_i)$ auf und wenden die Formel für den Erwartungswert an.

Klausuraufschrieb

a) Das Glücksrad ist in vier Sektoren unterteilt mit jeweils
$\alpha_1 = \frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$; $\alpha_2 = \frac{1}{3} \cdot 360° = 120\,°$; $\alpha_3 = \frac{1}{6} \cdot 360° = 60°$; $\alpha_4 = \frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$

b) Ausgehend vom gegebenen Erwartungswert $E(X) = 0{,}5$ könnte bei einem Spieleinsatz von 3 € folgender „Gewinnplan" aufgestellt werden:
Sektor 1: kein Gewinn
Sektor 2: 2 €
Sektor 3: 5 €
Sektor 4: 4 €
Die Tabelle hat folgendes Aussehen (aufsteigend sortiert):

Gewinnplan (x_i)	5 €	4 €	2 €	0 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
Auszahlung	$5 \cdot \frac{1}{6}$	$4 \cdot \frac{1}{4}$	$2 \cdot \frac{1}{3}$	$0 \cdot \frac{1}{4}$

$E(X) = \frac{5}{6}€ + 1€ + \frac{2}{3}€ = 2{,}50€$
Felix muss auf lange Sicht gesehen $2{,}50$ € auszahlen bei einem Einsatz von $3{,}00$ €. Sein Gewinn pro Spiel beträgt somit im Durchschnitt $0{,}50$ €.

Lösung A4

Lösungslogik

Wir wenden die Formel für den Erwartungswert an.

Klausuraufschrieb

$E(X) = \frac{23}{6} = 0 \cdot a + 2 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot b$
$\frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 10b = \frac{23}{6}$
$10b = \frac{23}{6} - \frac{13}{6} = \frac{5}{3}$
$b = \frac{1}{6}$
$a + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$
$a = \frac{1}{4}$
Die gesuchten Werte sind $a = \frac{1}{4}$ *und* $b = \frac{1}{6}$.

Lösung A5

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.

a) Das Gegenereignis zu rot spätestens im dritten Zug ist dreimal keine rote Kugel zu ziehen.

b) Die Zufallsvariable X kann die Werte von 1 bis 5 annehmen (5 Kugeln im Behälter).

Klausuraufschrieb

a) A: „Rot spätestens im dritten Zug"
$\overline{A}$: „Nur schwarz in drei Zügen"
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$

b)

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1}$

$E(X) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{5}{5} = \frac{15}{5} = 3$

Durchschnittlich muss man mit 3 Zügen rechnen, bis die rote Kugel gezogen wird.

Lösung A6

Lösungslogik

Bei Würfelexperimenten lohnt es sich, eine Ereignistabelle aufzustellen. Der Ereignisraum für A ist nebenstehend orange markiert, für B darunter ebenfalls in orange. Zusätzliche Felder für Aufgabenteil b) in lila.

b). Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn von Max in Spielchips an. X kann die Werte -1, 4 und 5 annehmen.

Wertigkeit jedes Ereignisses ist $\frac{1}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Wertigkeit jedes Ereignisses ist $\frac{1}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Klausuraufschrieb

a) $P(A) = 10 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$
$P(B) = 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$

b) X entspricht der Zufallsvariablen für den Gewinn von Max. Die Wahrscheinlichkeiten für X sind:
$P(X = 4) = P(B) = \frac{1}{9}$
$P(X = 5) = \frac{1}{18}$
$P(X = -1) = \frac{5}{6}$
$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{1}{18} + (-1) \cdot \frac{5}{6} = -\frac{1}{9}$
Da der Erwartungswert für den Gewinn von Max nicht null ist, ist das Spiel nicht fair.

Lösung A7

Lösungslogik

Berechnung über den Erwartungswert. Ein Spiel ist dann fair, wenn $E(X) = 0$ ist. Wir stellen eine Tabelle auf, wobei in diesem Falle, in dem der Einsatz bekannt ist, die Einzelgewinne um den Einsatz zu reduzieren sind.

Klausuraufschrieb

$P(A) = \frac{1}{2}$

x_i	$2{,}50$ €	$0{,}5$ €	$-0{,}50$ €	$-1{,}50$ €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(X) = 2{,}50 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}50 \cdot \frac{1}{4} + (-0{,}50) \cdot \frac{1}{8} + (-1{,}50) \cdot \frac{1}{8} = 1{,}13$ €

Wegen $E(X) \neq 0$ ist das Spiel nicht fair. Auf lange Sicht gesehen verliert der Spielebetreiber etwa $1{,}13$ € /Spiel.

Lösung A8

Lösungslogik

Wir bestimmen zunächst die Wahrscheinlichkeiten für drei Karten gleicher Farbe. Es handelt sich um insgesamt 16 Karten, wovon jeweils 4 Karten die gleiche Farbe haben.
Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Die Wahrscheinlichkeit einer einzelnen Kombination beträgt $p = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{1}{140}$. Wegen der vier Kartenfarben also $4 \cdot \frac{1}{140} = \frac{1}{35}$.
Die gleiche Logik gilt für vier Karten desselben Wertes.

Klausuraufschrieb

Anzahl der Karten ist 16 wovon jeweils 4 Karten die gleiche Farbe und jeweils 4 Karten denselben Wert haben.
G: „Drei Karten mit gleichem Wert."
F: „Drei Karten mit gleicher Farbe."

$P(G) = \binom{4}{3} \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = 4 \cdot \frac{1}{140} = \frac{1}{35}$

$P(F) = \binom{4}{3} \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = 4 \cdot \frac{1}{140} = \frac{1}{35}$

Für den Erwartungswert $E(X)$ gilt:
Die Zufallsvariable X kann die Werte $x_1 = 15$ € für dreimal die gleiche Farbe, $x_2 = a$ € für dreimal den gleichen Wert und $x_3 = -1$ € für keines von beidem annehmen. Es gilt:

x_i	15 €	a €	$-1{,}00$ €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{33}{35}$

$E(X) = 15 \cdot \frac{1}{35} + a \cdot \frac{1}{35} + (-1) \cdot \frac{33}{35} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 18$

Der Gewinn für drei Karten mit gleichem Wert muss 18 € betragen, damit das Spiel fair ist.