Lösung A9

Klausuraufschrieb

$P(1.Feld) = \frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$; $P(2.Feld) = \frac{360°-90°}{360°} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$; $P(3.Feld) = \frac{3}{8}$.

$1.Feld$	$2.Feld$	$3.Feld$
2,00 €	5,00 €	0,00 €
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
0,50 €	1,88 €	0 €

$E(X) = 0{,}50\,€ + 1{,}88\,€ + 0\,€ = 2{,}38\,€$

Da der Spieler einen Einsatz von $3{,}00\,€$ leisten muss beträgt der erwartete Gewinn für den Spieler $2{,}38\,€ - 3{,}00\,€ = -0{,}62\,€$.

Der Spieler macht auf lange Sicht gesehen pro Spiel einen Verlust von $0{,}62\,€$.

Lösung A10

Klausuraufschrieb

Ereignisraum:

$E = \{(2;2), (2;5), (5;2), (2;-7), (-7;2); (5;5), (5;-7), (-7;5), (-7;-7)\}$

Wahrscheinlichkeiten:

$P(-7;-7) = P(X = -14) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$

$P(5;5) = P(X = 10) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$

$P(2;2) = P(X = 4) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$

$P\big((5;-7), (-7;5)\big) = P(X = -2) = 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}24$

$P\big((2;-7), (-7;2)\big) = P(X = -5) = 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}24$

$P\big((2;5), (5;2)\big) = P(X = 7) = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$

a) $P(Spieler\ gewinnt) = P(X > 0) = 0{,}09 + 0{,}09 + 0{,}18 = 0{,}36$.
$P(Spieler\ verliert) = 1 - P(Spieler\ gewinnt) = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$

b) Aus a) folgt eine Binomialverteilung mit $n = 5$, $p = 0{,}36$ für Gewinn und $X = 3$ für 3 Gewinne.
$B_{5;0,36}(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}36^3 \cdot 0{,}64^2 = 0{,}1911 \approx 19\,\%$

c) *Berechnung des Erwartungswertes $E(X)$:*

x_i	10 €	7 €	4 €	−2 €	−5 €	−14 €
$P(X = x_i)$	0,09	0,18	0,09	0,24	0,24	0,16
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,90 €	1,26 €	0,36 €	−0,48 €	−1,20 €	−2,24 €

$E(X) = 0{,}90 + 1{,}26 + 0{,}36 - 0{,}48 - 1{,}20 - 2{,}24 = -1{,}40\,€$

Der mittlere Verlust des Spielers/Spiel beträgt $1{,}40\,€$. Dies ist der Gewinn des Spielebetreibers.

Anzahl Spiele für Verdienst von $1000\,€$:

$\frac{1000\,€}{1{,}40\,€} = 714{,}29$

Es müssen etwa 715 Spiele gespielt werden, damit der Spielebetreiber einen Gewinn von $1000\,€$ hat.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A11

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen zweier Münzen entspricht zweimaliges Ziehen hintereinander ohne Zurücklegen.
Aufstellung des Ereignisraums und Berechnung der Wahrscheinlichkeiten.

Klausuraufschrieb

Ereignisraum:

$E = \{(0{,}50; 1), (1; 0{,}50), (0{,}50; 2), (2; 0{,}50), (1\,; 2); (2; 1), (0{,}50; 0{,}50), (1; 1), (2; 2)\}$

Wahrscheinlichkeiten:

$P(0{,}50\,€; 0{,}50\,€) = P(X = 1\,€) = \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} = \frac{132}{600}$

$P(1\,€; 1\,€) = P(X = 2\,€) = \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} = \frac{20}{600}$

$P(2\,€; 2\,€) = P(X = 4\,€) = \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} = \frac{56}{600}$

$P\big((0{,}50\,€; 1\,€), (1\,€; 0{,}50\,€\big) = P(X = 1{,}50\,€) = 2 \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{24} = \frac{120}{600}$

$P((0{,}50\,€; 2\,€), (2\,€;\ 0{,}50\,€)) = P(X = 2{,}50\,€) = 2 \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{8}{24} = \frac{192}{600}$

$P((1\,€; 2\,€), (2\,€; 1\,€)) = P(X = 3\,€) = 2 \cdot \frac{5}{25} \cdot \frac{8}{24} = \frac{80}{600}$

Berechnung des Erwartungswertes $E(X)$:

x_i	$1\,€$	$2\,€$	$4\,€$	$1{,}50\,€$	$2{,}50\,€$	$3\,€$
$P(X = x_i)$	$\frac{132}{600}$	$\frac{20}{600}$	$\frac{56}{600}$	$\frac{120}{600}$	$\frac{192}{600}$	$\frac{80}{600}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$0{,}22\,€$	$0{,}07\,€$	$0{,}37\,€$	$0{,}30\,€$	$0{,}80\,€$	$0{,}40\,€$

$E(X) = 0{,}22 + 0{,}07 + 0{,}37 + 0{,}30 + 0{,}80 + 0{,}40 = 2{,}16\,€$

Man kann bei häufiger Versuchsdurchführung durchschnittlich mit $2{,}16\,€$ rechnen.

Lösung A12

Klausuraufschrieb

a) Erwartungswert von G:

g in €	-1	0	1	4
$P(G = g)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$
$g \cdot P(G = g)$	$-0{,}67$	0	$0{,}10$	$0{,}27$

$E(G) = -0{,}67 + 0{,}1 + 0{,}27 = -0{,}30$

b) Gemäß a) macht der Spieler pro Spiel einen Verlust von $0{,}30\,€$. Der Einsatz muss somit auf $0{,}70\,€$ gesenkt werden, damit das Spiel fair ist.

c)

g in €	-1	0	1	a
$P(G = g)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$
$g \cdot P(G = g)$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}a$

$E(G) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}a = 0$

$\frac{1}{15}a = \frac{17}{30} \implies a = 8{,}50$

Aufgrund des Einsatzes von $1\,€$ muss der maximale Auszahlung auf $9{,}50\,€$ angehoben werden, damit das Spiel fair ist.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A13

Klausuraufschrieb

a) *Ereignisraum:*

$E = \{(A;A),(B;B),(C;C),(\overline{A};\overline{A} \wedge \overline{B};\overline{B} \wedge \overline{C};\overline{C})\}$

Wahrscheinlichkeiten:

$P(A;A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; $P(B;B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$; $P(C;C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$P(Gewinn) = P(A;A) + P(B;B) + P(C;C) = \frac{3}{8}$

b)

x_i	$0{,}50$ €	$-0{,}50$ €
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$0{,}1875$	$-0{,}3125$

$G(X) = 0{,}1875 - 0{,}3125 = -0{,}125$

c) Da bei dem Einsatz von $0{,}50$ € der erwartete Verlust des Spielers $0{,}125$ € beträgt, müsste der Einsatz um $0{,}125$ € gesenkt werden, also $0{,}375$ € betragen.
Da ein Einsatz mit einem „halben Eurocent" nicht möglich ist, kann der Einsatz nicht so geändert werden, damit die Lotterie fair ist.

Lösung A14

Klausuraufschrieb

Wahrscheinlichkeiten:

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Druckfehler / Seite an.

$P(X = 0) = 0{,}17$ $\quad$ $P(X = 1) = 0{,}3$

$P(X = 2) = 0{,}27$ $\quad$ $P(X = 3) = 0{,}16$

$P(X \geq 4) = 1 - 0{,}3 - 0{,}27 - 0{,}16 - 0{,}17 = 0{,}10$

Erwartungswert:

Wegen $P(X \geq 4)$ kann der Erwartungswert von X nicht exakt berechnet werden. Wenn wir jedoch $P(X = 4) = 0{,}1$ unterstellen, erhalten wir mit $E(X)$ eine untere Grenze für den möglichen tatsächlichen Erwartungswert.
Da nach durchschnittlicher Druckfehleranzahl gefragt ist, die sich *mindestens* auf einer Zeitungsseite befinden, ist dies auch die gesuchte Größe.

$E(XA) = 0 \cdot 0{,}17 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}27 + 3 \cdot 0{,}16 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}72$

Es sind durchschnittlich mindestens $1{,}72$ *Fehler auf einer Zeitungsseite.*

Lösung A15

Klausuraufschrieb

a) *Ereignisraum:*

$E = \{(weiß),(schwarz;weiß),(schwarz;schwarz:weiß),(schwarz;schwarz;schwarz)\}$

Wahrscheinlichkeiten:

$P(weiß) = P(X = 0)$ $\quad$ $P(schwarz;weiß) = P(X = 1)$

$P(schwarz;schwarz;weiß) = P(X = 2)$ $\quad$ $P(schwarz;schwarz;schwarz) = P(X = 3)$

$P(X = 0) = \frac{4}{10}$ $\quad$ $P(X = 1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{90}$

$P(X = 2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{120}{720}$ $\quad$ $P(X = 3) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{120}{720}$

b)

x_i	$20\,€$	$10\,€$	$-10\,€$
$P(X=x_i)$	$\frac{120}{720}$	$\frac{120}{720}$	$\frac{480}{720}$
$x_i \cdot P(X=x_i)$	$3{,}33\,€$	$1{,}67\,€$	$-6{,}67\,€$

$E(X) = 3{,}33\,€ + 1{,}67\,€ - 6{,}67\,€ = -1{,}67\,€$

Der Spieler hat einen mittleren Verlust von $1{,}67\,€$ *pro Spiel.*

Einsatz für faires Spiel:

Da der Spieler durchschnittlich $1{,}67\,€$ pro Spiel Verlust macht, müsste der Einsatz um $1{,}67\,€$ vermindert werden.

Der Einsatz für ein faires Spiel müsste $8{,}33\,€$ *betragen.*

Lösung A16

Klausuraufschrieb

Ereignisse:

A: „Drei Kugeln gleiche Farbe"

B: „Drei Kugeln unterschiedliche Farbe"

C: „Weder Ereignis A noch Ereignis B"

Wahrscheinlichkeiten

$P(A) = P(rrr; www) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{11}{120}$

$P(B) = P(rwb; rbw; wrb; wbr; brw; bwr) = 3! \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{8} = 6 \cdot \frac{30}{720} = \frac{1}{4}$

$P(C) = 1 - \big(P(A) - P(B)\big) = 1 - \frac{66}{720} - \frac{180}{720} = \frac{79}{120}$

Erwartungswert:

x_i	$6\,€$	$2\,€$	$-1{,}50\,€$
$P(X=x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{79}{120}$
$x_i \cdot P(X=x_i)$	$0{,}55\,€$	$0{,}50\,€$	$-0{,}9875\,€$

$E(X) = 0{,}55 + 0{,}50 - 0{,}9875 = 0{,}0625$

Auf lange Sicht gesehen gewinnt der Spieler etwa $0{,}06\,€$ *pro Spiel.*

Lösung A17

Klausuraufschrieb

Ereignisse:

A: „Glücksrad zeigt gerade Zahl"

B: „Glücksrad zeigt ungerade Zahl"

C: „U1 $(w,w) \vee (\overline{w},\overline{w})$"

D: „U2 $(w,w) \vee (\overline{w},\overline{w})$"

Wahrscheinlichkeiten:

$P(A) = 0{,}25;\quad P(B) = 0{,}75;\quad P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5;\quad P(D) = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0{,}82$

$P(1\,€\,Gewinn) = P(A \cap D) + P(B \cap C) = 0{,}25 \cdot 0{,}82 + 0{,}75 \cdot 0{,}5 = 0{,}58$

$P(1{,}50\,€\,kein\,Gewinn) = 1 - P(1\,€\,Gewinn) = 0{,}42$

Erwartungswert:

$E(X) = 1 \cdot 0{,}58 - 1{,}50 \cdot 0{,}42 = -0{,}05$

Das Spiel ist nicht fair, der Spieler verliert auf lange Sicht pro Spiel $0{,}05\,€$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de