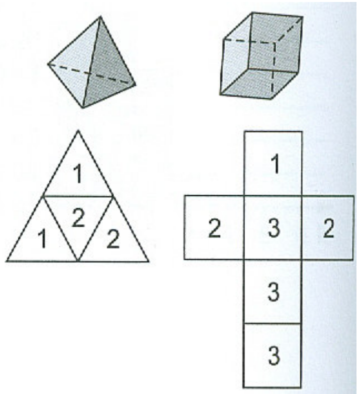
Aufgabenblatt zum Erwartungswert

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Dokument mit 9 Aufgaben

Aufgabe A1

Die Seiten eines Tetraeders und eines Würfels sind wie abgebildet mit Zahlen beschriftet. Beide werden gleichzeitig geworfen. Dabei gilt bei dem Tetraeder die Zahl als geworfen, die unten liegt.



a) Begründe, dass die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse

A: "Die Summe der Zahlen ist 5" und

B: "Die Summe der Zahlen ist 3"

jeweils $\frac{1}{4}$ beträgt.

b) Bei einem Glücksspiel werden das Tetraeder und der Würfel gleichzeitig geworfen. Ein Spieler zahlt einen bestimmten Betrag als Einsatz ein. Ist die Augensumme gerade, erhält er seinen Einsatz zurück. Ist die Augensumme gleich 5, bekommt er 3 € ausgezahlt. In allen anderen Fällen ist sein Einsatz verloren. Wie hoch sollte der Einsatz sein, damit er auf lange Sicht weder Verlust noch Gewinn macht?

Aufgabe A2

Eine Firma stellt Energiesparlampen her. Die Herstellungskosten für eine Lampe betragen $3{,}50$ €. Sie wird für $5{,}20$ € an den Einzelhandel verkauft. Erfahrungsgemäß sind $8{,}5\,\%$ der Lampen defekt. Defekte Lampen werden vom Einzelhandel stets entdeckt. Sie werden von der Firma zurückgenommen und der Kaufpreis wird erstattet. Für jede zurückgenommene Lampe entstehen der Firma zusätzliche Kosten in Höhe von $1{,}20$ €.

a) Wie hoch ist der durchschnittliche Gewinn pro Lampe für die Firma?

b) Um den Gewinn zu steigern, will die Firma vor der Auslieferung der Lampen ein Testverfahren durchführen. Dabei werden alle intakten und $90\,\%$ aller defekten Lampen als solche erkannt. Die als defekt erkannten Lampen werden dann ohne weitere Kosten entsorgt. Wie teuer darf der Test einer Lampe sein, damit sich das Testverfahren für die Firma lohnt?

Aufgabe A3

Bei einem Glücksspiel wird ein idealer Würfel dreimal geworfen. Man erhält:

für eine Sechs 1 €,

für zwei Sechsen 5 €,

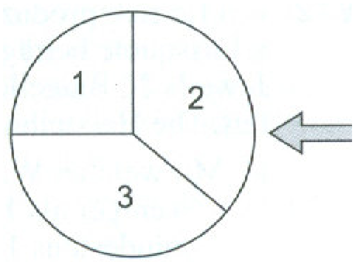
für drei Sechsen 10 €

ausgezahlt. In allen anderen Fällen wird nichts ausgezahlt. Welchen Einsatz muss der Betreiber des Glücksspiels mindestens verlangen, damit er auf lange Sicht keinen Verlust macht?

Aufgabe A4

Bei dem abgebildeten Glücksrad erhält man bei einer Drehung die Zahl 1 mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}25$ und die Zahl 2 mit der Wahrscheinlichkeit p.

a) Das Glücksrad wird dreimal gedreht.
Man betrachtet das Ereignis:
A: "Es erscheinen drei verschiedene Zahlen"
Berechne die Wahrscheinlichkeit von A für $p = 0{,}3$.
Für welchen Wert von p ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A am größten? Wie groß sind in diesem Fall die Mittelpunktswinkel der drei Sektoren auf dem Glücksrad?



b) Felix und Max vereinbaren folgendes Spiel:
Felix setzt einen Euro ein. Dann dreht Max das Rad. Erscheint eine 2, so nimmt Max den Euro an sich und das Spiel ist beendet. Andernfalls legt Max zwei Euro dazu und Felix dreht das Rad. Bei einer 2 bekommt Felix den Gesamtbetrag von drei Euro. Ansonsten teilen sich beide diesen Betrag und das Spiel ist beendet. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit p für die Zahl 2 sein, damit das Spiel möglichst fair ist?

Aufgabe A5

Ein Betrieb produziert für ein großes Unternehmen elektronische Bauteile. Die Ausschussquote beträgt dabei erfahrungsgemäß $15\,\%$.
Jeweils 20 Bauteile werden ohne Überprüfung in eine Schachtel gepackt und ausgeliefert. Die Herstellungskosten pro Schachtel betragen 55 €.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in einer Schachtel
- weniger als 16,
- mindestens 18

einwandfreie Bauteile?

b) Dem Unternehmen werden für jede gelieferte Schachtel 120 € berechnet. Allerdings werden die Bauteile im Unternehmen überprüft. Ist in einer Schachtel höchstens ein Bauteil defekt, so zahlt das Unternehmen den vollen Preis. Bei zwei bis vier defekten Bauteilen in einer Schachtel zahlt es nur $50\,\%$ des Preises. Bei mehr als vier defekten Bauteilen wird die Schachtel nicht bezahlt.
Macht der Herstellerbetrieb bei dieser Vereinbarung noch Gewinn?

Lösung A1

Lösungslogik

a) Es handelt sich um ein zweistufiges Zufallsexperiment mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Aufstellen des Ereignisraums und der Einzelwahrscheinlichkeiten nach den Pfadregeln.

b) Bestimmung des Erwartungswertes $E(X) = 0$.

Klausuraufschrieb

a) A: „Die Summe der Zahlen ist 5"

Tetraeder: $P_T(1) = \frac{1}{2};\ P_T(2) = \frac{1}{2}$

Würfel: $P_W(1) = \frac{1}{6};\ P_W(2) = \frac{1}{3};\ P_W(3) = \frac{1}{2}$

$A = (\{2_T; 2_W\})$

$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

B: „Die Summe der Zahlen ist 3"

$B = \{(1_T; 2_W), (1_W; 2_T)\}$

$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

b) C: „Die Augensumme ist gerade"

$C = \{(1_T; 1_W), (2_T; 2_W), (1_T; 3_W)\}$

$P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Der Einsatz sei a.

x_i	$3 - a$	0	$-a$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) = \frac{1}{4} \cdot (3 - a) + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-a) = 0$

$\frac{3}{4} - \frac{a}{4} - \frac{a}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1{,}50$

Bei einem Einsatz von $1{,}50$ € macht ein Spieler bei diesem Spiel auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust.

Lösung A2

Lösungslogik

a) Der durchschnittliche Gewinn entspricht dem Erwartungswert $E(X)$.

b) Wie bei a) entspricht der durchschnittliche Gewinn dem Erwartungswert, wobei hier bei mit $0{,}9$ durch das Testverfahren entdecktem Defekt ein reduzierter Verlust entsteht. Die Einführung des Testverfahrens lohnt sich für die Firma, wenn die Testkosten pro Lampe geringer sind als der Unterschied der Erwartungswerte aus b) und a).

Klausuraufschrieb

a) Gewinn Lampe intakt: $5{,}20\ € - 3{,}50\ € = 1{,}70\ €$

Gewinn Lampe defekt: $5{,}20\ € - 5{,}20\ € - 3{,}50\ € - 1{,}20\ € = -4{,}70\ €$

$P(X = 1{,}70) = 1 - 0{,}085 = 0{,}915$

$P(X = -4{,}70) = 0{,}085$

$E_a(X) = 0{,}915 \cdot 1{,}70 + 0{,}085 \cdot (-4{,}70) = 1{,}156$

Der durchschnittliche Gewinn pro Lampe beträgt etwa $1{,}16$ €.

b) Gewinn Lampe intakt: $1{,}70\ €$
Gewinn Lampe defekt Fehler erkannt: $-3{,}50\ €$
Gewinn Lampe defekt Fehler nicht erkannt: $-4{,}70\ €$
$P(X = 1{,}70) = 0{,}915$
$P(X = -3{,}50) = 0{,}085 \cdot 0{,}9 = 0{,}0765$
$P(X = -4{,}70) = 0{,}085 \cdot 0{,}1 = 0{,}0085$
$E_b(X) = 0{,}915 \cdot 1{,}70 + 0{,}0765 \cdot (-3{,}50) + 0{,}0085 \cdot (-4{,}70) = 1{,}25$
$E_b(X) - E_a(X) = 1{,}25 - 1{,}16 = 0{,}09$
Der Test einer Lampe muss weniger als $0{,}09\ €$ kosten, damit sich die Einführung des Testverfahrens lohnt.

Lösung A3

Lösungslogik

Der Erwartungswert ist zu berechnen und ein Spieleinsatz zu ermitteln, der zu $E(X) = 0$ führt.

Klausuraufschrieb

$P(eine\ 6) = 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{75}{216}$
$P(zweimal\ 6) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$
$P(dreimal\ 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$
$P(Niete) = 1 - \frac{75+15+1}{216} = \frac{125}{216}$
Der Einsatz sei a.

x_i	$10 - a$	$5 - a$	$1 - a$	$-a$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{125}{216}$

$E(X) = \frac{10-a+15\cdot(5-a)+75\cdot(1-a)-125\cdot a}{216} = 0$
$10 + 75 + 75 - 216a = 0$
$160 = 216a \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}74$
Der Einsatz bei dem Spiel muss mindestens $0{,}74\ €$ betragen, damit der Betreiber langfristig keinen Verlust macht.

Lösung A4

Lösungslogik

a) Berechnung der Wahrscheinlichkeit entsprechend den Pfadregeln. Ist p unbekannt, ergibt sich eine quadratische Gleichung mit einem Maximum. Die jeweiligen Mittelpunktswinkel ergeben sich aus $\alpha_n = p_n \cdot 360°$.
b) Ermittlung des Erwartungswertes mit $E(X) = 0$. Aufstellung der Gewinn- / Verlustmöglichkeiten von Felix.

Klausuraufschrieb

a) $P(1) = 0{,}25$
$P(2) = 0{,}3$
$P(3) = 1 - 0{,}25 - 0{,}3 = 0{,}45$
$P(A) = 3! \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}45 = 0{,}2025$
Die Wahrscheinlichkeit von A für $p = 0{,}3$ beträgt $20{,}25\ \%$.
$P(A(p)) = 3! \cdot 0{,}25 \cdot p \cdot (0{,}75 - p) = 1{,}5 \cdot p \cdot (0{,}75 - p)$

$P(A(p))_{max} \overset{GTR}{\approx} 0{,}2109$ für $p \overset{GTR}{\approx} 0{,}375$

Für $p = 0{,}375$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass drei verschiedene Zahlen erscheinen am größten.

Mittelpunktswinkel:

$\alpha_1 = p_1 \cdot 360\,° = 90°$ $\alpha_2 = 0{,}375 \cdot 360\,° = 135°$ $\alpha_3 = 360\,° - \alpha_1 - \alpha_2 = 135°$

b) X gibt den Gewinn von Felix nach Abzug seines Einsatzes an. Felix kann:
einen Euro verlieren (⟶ Max erhält eine 2)
zwei Euro gewinnen (⟶ Felix erhält eine 2)
$0{,}50$ Euro gewinnen (⟶ der Betrag von 3 € wird geteilt)
$x_i \in \{-1; 2; 0{,}5\}$

x_i	-1	2	$0{,}5$
$P(X = x_i)$	p	$(1-p)\cdot p$	$(1-p)^2$
	1. Drehung 2	1. Drehung $\overline{2}$ 2. Drehung 2	1. Drehung $\overline{2}$ 2. Drehung $\overline{2}$

$E(X) = -p + 2 \cdot p(1-p) + 0{,}5 \cdot (1-p)^2 = 0$

$-p + 2p - 2p^2 + 0{,}5 - p + 0{,}5p^2 = 0$

$-1{,}5p^2 + 0{,}5 = 0$

$p^2 = \frac{1}{3} \implies p \approx 0{,}5774$

Beträgt die Wahrscheinlichkeit für die Zahl 2 ungefähr $57{,}7\,\%$, so ist das Spiel nahzu fair.

Lösung A5

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X für intakte Bauteile ist $B_{20;0,85}$-verteilt.
b) Die Zufallsvariable X für defekte Bauteile ist $B_{20;0,15}$-verteilt.

Klausuraufschrieb

a) X für einwandfreie Bauteile ist $B_{20;0,85}$-verteilt.

Weniger als 16 einwandfreie Bauteile:

$B_{20;0,85}(X \le 15) \overset{GTR}{\approx} 0{,}17015 \approx 17\,\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $17\,\%$.sind weniger als 16 einwandfreie Bauteile in einer Schachtel mit 20 Stück.

Mindestens 18 einwandfreie Bauteile:

$B_{20;0,85}(X \ge 18) = 1 - B_{20;0,85}(X \le 17) \overset{GTR}{\approx} 0{,}404896 \approx 40{,}5\,\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $40{,}5\,\%$.sind mindestens 18 einwandfreie Bauteile in einer Schachtel mit 20 Stück.

b) X für defekte Bauteile ist $B_{20;0,15}$-verteilt.

Höchstens ein Bauteil defekt:

$B_{20;0,15}(X \le 1) \overset{GTR}{\approx} 0{,}17556 \approx 17{,}6\,\%$

Zwei bis vier defekte Bauteile:

$B_{20;0,15}(2 \le X \le 4) = B_{20;0,15}(X \le 4) - B_{20;0,15}(X \le 1) \overset{GTR}{\approx} 0{,}65429 \approx 65{,}4\,\%$

Mehr als vier defekte Bauteile:
$p = 100 - 17{,}6 - 65{,}4 = 17\ \%$
G beschreibt den Ertrag, den der Betrieb pro Schachtel erzielt. Der mittlere Ertrag ist der Erwartungswert $E(G)$.

g_i	120	60	0
$P(G = g_i)$	0,176	0,654	0,17

$E(G) = 0{,}176 \cdot 120 + 0{,}654 \cdot 60 + 0{,}17 \cdot 0 = 60{,}36$
Da der mittlere Ertrag von $60{,}36$ € *pro Schachtel größer als die Herstellkosten von* 55 € *ist, macht der Herstellerbetrieb auf lange Sicht Gewinn.*