Lösung A1

Lösungslogik

a) Es handelt sich um ein zweistufiges Zufallsexperiment mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Aufstellen des Ereignisraums und der Einzelwahrscheinlichkeiten nach den Pfadregeln.

b) Bestimmung des Erwartungswertes $E(X) = 0$.

Klausuraufschrieb

a) A: „Die Summe der Zahlen ist 5"

Tetraeder: $P_T(1) = \frac{1}{2};\ P_T(2) = \frac{1}{2}$

Würfel: $P_W(1) = \frac{1}{6};\ P_W(2) = \frac{1}{3};\ P_W(3) = \frac{1}{2}$

$A = (\{2_T; 2_W\})$

$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

B: „Die Summe der Zahlen ist 3"

$B = \{(1_T; 2_W), (1_W; 2_T)\}$

$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

b) C: „Die Augensumme ist gerade"

$C = \{(1_T; 1_W), (2_T; 2_W), (1_T; 3_W)\}$

$P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Der Einsatz sei a.

x_i	$3 - a$	0	$-a$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) = \frac{1}{4} \cdot (3 - a) + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-a) = 0$

$\frac{3}{4} - \frac{a}{4} - \frac{a}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1{,}50$

Bei einem Einsatz von $1{,}50$ € macht ein Spieler bei diesem Spiel auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust.

Lösung A2

Lösungslogik

a) Der durchschnittliche Gewinn entspricht dem Erwartungswert $E(X)$.

b) Wie bei a) entspricht der durchschnittliche Gewinn dem Erwartungswert, wobei hier bei mit $0{,}9$ durch das Testverfahren entdecktem Defekt ein reduzierter Verlust entsteht. Die Einführung des Testverfahrens lohnt sich für die Firma, wenn die Testkosten pro Lampe geringer sind als der Unterschied der Erwartungswerte aus b) und a).

Klausuraufschrieb

a) Gewinn Lampe intakt: $5{,}20\text{ €} - 3{,}50\text{ €} = 1{,}70\text{ €}$

Gewinn Lampe defekt: $5{,}20\text{ €} - 5{,}20\text{ €} - 3{,}50\text{ €} - 1{,}20\text{ €} = -4{,}70\text{ €}$

$P(X = 1{,}70) = 1 - 0{,}085 = 0{,}915$

$P(X = -4{,}70) = 0{,}085$

$E_a(X) = 0{,}915 \cdot 1{,}70 + 0{,}085 \cdot (-4{,}70) = 1{,}156$

Der durchschnittliche Gewinn pro Lampe beträgt etwa $1{,}16$ €.

b) Gewinn Lampe intakt: $1{,}70$ €
Gewinn Lampe defekt Fehler erkannt: $-3{,}50$ €
Gewinn Lampe defekt Fehler nicht erkannt: $-4{,}70$ €
$P(X=1{,}70)=0{,}915$
$P(X=-3{,}50)=0{,}085\cdot 0{,}9=0{,}0765$
$P(X=-4{,}70)=0{,}085\cdot 0{,}1=0{,}0085$
$E_b(X)=0{,}915\cdot 1{,}70+0{,}0765\cdot(-3{,}50)+0{,}0085\cdot(-4{,}70)=1{,}25$
$E_b(X)-E_a(X)=1{,}25-1{,}16=0{,}09$
Der Test einer Lampe muss weniger als $0{,}09$ € kosten, damit sich die Einführung des Testverfahrens lohnt.

Lösung A3

Lösungslogik

Der Erwartungswert ist zu berechnen und ein Spieleinsatz zu ermitteln, der zu $E(X)=0$ führt.

Klausuraufschrieb

$P(eine\ 6)=3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{75}{216}$
$P(zweimal\ 6)=3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{216}$
$P(dreimal\ 6)=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$
$P(Niete)=1-\frac{75+15+1}{216}=\frac{125}{216}$
Der Einsatz sei a.

x_i	$10-a$	$5-a$	$1-a$	$-a$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{125}{216}$

$E(X)=\frac{10-a+15\cdot(5-a)+75\cdot(1-a)-125\cdot a}{216}=0$
$10+75+75-216a=0$
$160=216a \quad\Rightarrow\quad a=0{,}74$
Der Einsatz bei dem Spiel muss mindestens $0{,}74$ € betragen, damit der Betreiber langfristig keinen Verlust macht.

Lösung A4

Lösungslogik

a) Berechnung der Wahrscheinlichkeit entsprechend den Pfadregeln. Ist p unbekannt, ergibt sich eine quadratische Gleichung mit einem Maximum. Die jeweiligen Mittelpunktswinkel ergeben sich aus $\alpha_n=p_n\cdot 360°$.
b) Ermittlung des Erwartungswertes mit $E(X)=0$. Aufstellung der Gewinn- / Verlustmöglichkeiten von Felix.

Klausuraufschrieb

a) $P(1)=0{,}25$
$P(2)=0{,}3$
$P(3)=1-0{,}25-0{,}3=0{,}45$
$P(A)=3!\cdot 0{,}25\cdot 0{,}3\cdot 0{,}45=0{,}2025$
Die Wahrscheinlichkeit von A für $p=0{,}3$ beträgt $20{,}25\,\%$.
$P(A(p))=3!\cdot 0{,}25\cdot p\cdot(0{,}75-p)=1{,}5\cdot p\cdot(0{,}75-p)$

$P(A(p))_{max} \overset{GTR}{\approx} 0{,}2109$ für $p \overset{GTR}{\approx} 0{,}375$
Für $p = 0{,}375$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass drei verschiedene Zahlen erscheinen am größten.
Mittelpunktswinkel:
$\alpha_1 = p_1 \cdot 360\,° = 90°$ $\quad \alpha_2 = 0{,}375 \cdot 360\,° = 135°$ $\quad \alpha_3 = 360\,° - \alpha_1 - \alpha_2 = 135°$

b) X gibt den Gewinn von Felix nach Abzug seines Einsatzes an. Felix kann:
einen Euro verlieren (⟶ Max erhält eine 2)
zwei Euro gewinnen (⟶ Felix erhält eine 2)
$0{,}50$ Euro gewinnen (⟶ der Betrag von 3 € wird geteilt)
$x_i \in \{-1; 2; 0{,}5\}$

x_i	-1	2	$0{,}5$
$P(X = x_i)$	p	$(1-p)\cdot p$	$(1-p)^2$
	1. Drehung 2	1. Drehung $\overline{2}$ 2. Drehung 2	1. Drehung $\overline{2}$ 2. Drehung $\overline{2}$

$E(X) = -p + 2 \cdot p(1-p) + 0{,}5 \cdot (1-p)^2 = 0$
$-p + 2p - 2p^2 + 0{,}5 - p + 0{,}5p^2 = 0$
$-1{,}5p^2 + 0{,}5 = 0$
$p^2 = \frac{1}{3} \implies p \approx 0{,}5774$

Beträgt die Wahrscheinlichkeit für die Zahl 2 ungefähr $57{,}7\,\%$, so ist das Spiel nahzu fair.

Lösung A5

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X für intakte Bauteile ist $B_{20;0,85}$-verteilt.
b) Die Zufallsvariable X für defekte Bauteile ist $B_{20;0,15}$-verteilt.

Klausuraufschrieb

a) X für einwandfreie Bauteile ist $B_{20;0,85}$-verteilt.
Weniger als 16 einwandfreie Bauteile:
$B_{20;0,85}(X \leq 15) \overset{GTR}{\approx} 0{,}17015 \approx 17\,\%$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $17\,\%$.sind weniger als 16 einwandfreie Bauteile in einer Schachtel mit 20 Stück.
Mindestens 18 einwandfreie Bauteile:
$B_{20;0,85}(X \geq 18) = 1 - B_{20;0,85}(X \leq 17) \overset{GTR}{\approx} 0{,}404896 \approx 40{,}5\,\%$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $40{,}5\,\%$.sind mindestens 18 einwandfreie Bauteile in einer Schachtel mit 20 Stück.

b) X für defekte Bauteile ist $B_{20;0,15}$-verteilt.
Höchstens ein Bauteil defekt:
$B_{20;0,15}(X \leq 1) \overset{GTR}{\approx} 0{,}17556 \approx 17{,}6\,\%$
Zwei bis vier defekte Bauteile:
$B_{20;0,15}(2 \leq X \leq 4) = B_{20;0,15}(X \leq 4) - B_{20;0,15}(X \leq 1) \overset{GTR}{\approx} 0{,}65429 \approx 65{,}4\,\%$

Mehr als vier defekte Bauteile:
$p = 100 - 17{,}6 - 65{,}4 = 17\ \%$
G beschreibt den Ertrag, den der Betrieb pro Schachtel erzielt. Der mittlere Ertrag ist der Erwartungswert $E(G)$.

g_i	120	60	0
$P(G = g_i)$	$0{,}176$	$0{,}654$	$0{,}17$

$E(G) = 0{,}176 \cdot 120 + 0{,}654 \cdot 60 + 0{,}17 \cdot 0 = 60{,}36$
Da der mittlere Ertrag von $60{,}36$ € *pro Schachtel größer als die Herstellkosten von* 55 € *ist, macht der Herstellerbetrieb auf lange Sicht Gewinn.*