

Der Erwartungswert



Information für Nutzer dieses Materials

Dieses Dokument ist Teil eines der umfangreichsten, privat betriebenen Online-Portale Deutschlands für Mathematik und wird Ihnen nach dem kostenfreien bzw. kostenpflichtigen Download zur freien Nutzung zur Verfügung gestellt.

Neben den WIKIs zu den einzelnen Themengebieten mit ausführlicher Erläuterung und Beispielen werden umfangreiche Aufgabensammlungen getrennt nach Schwierigkeitsgraden bereitgestellt.

Sollte Ihnen das Material gefallen 😊 (oder auch 😘 nicht), besuchen Sie uns doch auf unserer Webseite und hinterlassen Sie eine Beurteilung. Oder vielleicht geben Sie uns ja einen Like in einem der sozialen Netzwerke?

gez.: Dr.-Ing. Meinolf Müller
verantwortlich für den Inhalt gem. § 5 TMG
von <https://www.fit-in-mathe-online.de>



	Seite
<u>Der Erwartungswert</u> <u>(62 Aufgaben)</u>	
WIKI Regeln und Formeln	03
Level 1 Grundlagen	
Aufgabenblatt 1 (13 Aufgaben)	05
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	07
Aufgabenblatt 2 (16 Aufgaben)	11
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	14
Aufgabenblatt 3 (7 Aufgaben)	18
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	20
Aufgabenblatt 4 (5 Aufgaben)	24
Lösungen zum Aufgabenblatt 4	25
 Level 2 Fortgeschritten	
Aufgabenblatt 1 (9 Aufgaben)	27
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	29
Aufgabenblatt 2 (12 Aufgaben)	33
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	35

	Seite
<u>Der Erwartungswert</u> <u>(62 Aufgaben)</u>	
WIKI Regeln und Formeln	03
Level 1 Grundlagen	
Aufgabenblatt 1 (13 Aufgaben)	04
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	06
Aufgabenblatt 2 (16 Aufgaben)	04
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	06
Aufgabenblatt 3 (7 Aufgaben)	04
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	06
Aufgabenblatt 4 (5 Aufgaben)	04
Lösungen zum Aufgabenblatt 4	06
Level 2 Fortgeschritten	
Aufgabenblatt 1 (9 Aufgaben)	04
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	06
Aufgabenblatt 2 (12 Aufgaben)	04
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	06

Einleitung



Der Erwartungswert bei Glücksspielen

Der **Erwartungswert** bei Glücksspielen dient dazu, festzustellen, bei welchen Gewinnplänen und Einsätzen der Spielbetreiber etwas verdient bzw. ein Spieler nichts verliert sondern Gewinne erzielt. Auch dient der **Erwartungswert** der Feststellung, bei welchem Verhältnis von Gewinn und Einsatz ein Spiel **fair** ist. Das **faire** Spiel ist dadurch definiert, als der Erwartungswert **Null** sein muss.

Im allgemeinen Schulbetrieb wurde teilweise bislang gelehrt, dass zur Ermittlung des Erwartungswertes der Einsatz eines Spielers zunächst vom Gewinn abzuziehen sei und der Einsatz mit negativem Vorzeichen und der Wahrscheinlichkeit für keinen Gewinn in die Erwartungsrechnung einfließt. Hierzu betrachten wir uns zunächst das folgende Beispiel.

Beispiel 1

Die Abschlussklassen des Robert-Mayer-Gymnasiums in Heilbronn organisieren zugunsten eines sozialen Projekts eine Tombola. Die Tabelle zeigt die Losverteilung und die damit jeweils verbundenen Gewinne.

Anzahl der Lose	Wert des Gewinns
150 Nieten	Kein Gewinn
40 Kleingewinne	Je 4,00 €
10 Hauptgewinne	Je 20,00 €

Ein Los kostet 2,00 €.

Berechne den Erwartungswert.

Lösung 1 bisher

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten für Gewinn und Nieten

$$P(20 \text{ €}) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} \quad P(4 \text{ €}) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5} \quad P(-2 \text{ €}) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$$

Berechnung des Erwartungswertes (mit Abzug des Einsatzes vom Gewinn):

x_i	18 €	2 €	-2,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,90 €	0,40 €	-1,50 €

$$E(X) = 0,9 + 0,40 - 1,50 = -0,20 \text{ €}$$

Lösung 1 vereinfacht

Wir stellen die Tabelle erneut auf, dieses Mal mit detailliertem Gewinn – Auszahlung:

Berechnung des Erwartungswertes (mit detailliertem Abzug):

x_i	$20 \text{ €} - 2 \text{ €}$	$4 \text{ €} - 2 \text{ €}$	$-2,00 \text{ €}$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$\frac{1}{20} (20 \text{ €} - 2 \text{ €})$	$\frac{1}{5} (4 \text{ €} - 2 \text{ €})$	$\frac{3}{4} \cdot (-2 \text{ €})$

$$E(X) = \frac{1}{20} (20 \text{ €} - 2 \text{ €}) + \frac{1}{5} (4 \text{ €} - 2 \text{ €}) + \frac{3}{4} \cdot (-2 \text{ €})$$

Im nächsten Schritt multiplizieren wir zunächst die Klammern aus.

$$E(X) = \frac{1}{20} \cdot 20 \text{ €} - \frac{1}{20} \cdot 2 \text{ €} + \frac{1}{5} \cdot 4 \text{ €} - \frac{1}{5} \cdot 2 \text{ €} - \frac{3}{4} \cdot 2 \text{ €}$$

Im nächsten Schritt fassen wir die Minuszahlen zusammen, die ja vom Abzug des Einsatzes vom Gewinn her rühren.

$$E(X) = \frac{1}{20} \cdot 20 \text{ €} + \frac{1}{5} \cdot 4 \text{ €} - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \right) \cdot 2 \text{ €}$$

Jetzt addieren wir die einzelnen Brüche in der Klammer vor dem Einsatzwert:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{1}{20} + \frac{4}{20} + \frac{15}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

Dann sieht der Erwartungswert wie folgt aus:

$$E(X) = \frac{1}{20} \cdot 20 \text{ €} + \frac{1}{5} \cdot 4 \text{ €} - 2 \text{ €} = 1 \text{ €} + 0,8 \text{ €} - 2 \text{ €} = -0,20 \text{ €}$$

Wie wir an diesem Beispiel sehen, ist es überhaupt nicht erforderlich, den Einsatz zunächst vom Gewinn abzuziehen. Es reicht vollständig aus, lediglich die nicht reduzierten Gewinne mit ihrer Gewinnwahrscheinlichkeit zu multiplizieren, aufzuaddieren und dann zum Schluss den vollen Einsatz davon abzuziehen. Dies führt zu einer wesentlichen Vereinfachung der Berechnung.

Aufgabe A1

Ein Glücksrad hat vier Sektoren, wovon die ersten beiden die Winkelgröße $\alpha = \beta = 60^\circ$ haben. Für die Winkelgrößen γ und δ des dritten und vierten Sektors gilt $\gamma = \delta$.



- Bestimme γ und gib die Wahrscheinlichkeit $P(\gamma)$ an, mit der das Rad so zu stehen kommt, dass der Pfeil in den dritten Sektor zeigt.
- Bei 3,00 € Einsatz erhält man Auszahlungen gemäß folgender Tabelle:

α	β	γ	δ
1,00 €	2,00 €	3,00 €	4,00 €

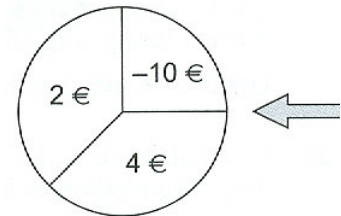
Bestimme den Gewinnerwartungswert. Entscheide, ob das Spiel fair ist.

Aufgabe A2

Für den Erwartungswert einer Zufallsvariablen X findet man die Formel

$$E(X) = x_1P(X = x_1) + x_2P(X = x_2) + \dots + x_nP(X = x_n)$$

- Erkläre die einzelnen Elemente dieser Formel. Welche Aussage macht der Erwartungswert?
- Erläutere den Erwartungswert an einem Beispiel unter Verwendung des abgebildeten Glücksrades.



Aufgabe A3

Felix will auf einem Fest ein Spiel mit einem Glücksrad anbieten, bei dem das Rad einmal gedreht wird. Um seinen Gewinn zu kalkulieren, führt er folgende Rechnung durch: $3\text{€} \cdot \frac{1}{4} + 1\text{€} \cdot \frac{1}{3} - 2\text{€} \cdot \frac{1}{6} - 1\text{€} \cdot \frac{1}{4} = 0,50\text{€}$

- Wie könnte das Glücksrad aussehen?
- Nenne eine mögliche Gewinnregel für die Spieler des Spiels, wenn Felix einen festen Einsatz pro Spiel verlangen will.

Aufgabe A4

Die Zufallsvariable X nimmt die Werte 0, 2, 6 und 10 an. Ihr Erwartungswert ist $E(X) = \frac{23}{6}$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X ist durch die folgende Tabelle gegeben:

x_i	0	2	6	10
$P(X = x_i)$	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	b

Bestimme die Werte für a und b .

Aufgabe A5

In einem Behälter liegen eine rote und vier schwarze Kugeln. Man nimmt so lange ohne Zurücklegen eine Kugel aus dem Behälter, bis die rote Kugel gezogen wird.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man höchstens dreimal ziehen muss?
- Mit wie vielen Ziehungen muss man durchschnittlich rechnen, bis die rote Kugel gezogen wird?

Aufgabe A6

Zwei ideale Würfel werden gleichzeitig geworfen.

- a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

A: „Genau ein Würfel zeigt eine 6“

B: "Die Augenzahlen unterscheiden sich um 4"

- b) Felix schlägt Max folgendes Spiel vor:

Unterscheiden sich die Augenzahlen der beiden Würfel um 4 oder 5, so bekommt Max den Unterschied in Spielchips ausgezahlt. In allen anderen Fällen muss er einen Spielchip an Felix zahlen. Ist das Spiel fair?

Aufgabe A7

Bei einem Glücksspiel wird eine ideale Münze geworfen. Liegt nach einem Wurf Wappen oben, so endet das Spiel. Andernfalls wird die Münze wieder geworfen, jedoch höchstens dreimal.

Als Gewinn erhält man:

1 € bei Wappen im ersten Wurf;

2 € bei Wappen im zweiten Wurf;

4 € bei Wappen im dritten Wurf.

Der Einsatz bei dem Spiel beträgt 1,50 €. Ist das Spiel fair?

Aufgabe A8

Einem Kartenspiel entnimmt man aus jeder der Farben Kreuz, Pik, Herz und Karo die Karten mit den Werten 7, 8, 9 und 10. Mit den entnommenen Karten wird folgendes Spiel gespielt:

Die Karten werden gemischt und ein Spieler zieht zufällig drei Karten. Sind die Karten von gleicher Farbe, erhält er 15 €. Haben die Karten den gleichen Wert, erhält er a €. In allen anderen Fällen muss er 1 € zahlen.

Für welchen Wert für a ist das Spiel fair?

Hinweis

Bei Aufgaben mit dem Erwartungswert wird empfohlen, unmittelbar eine Tabelle der x_i und $P(X = x_i)$ anzulegen.

Lösung A1

Lösungslogik

- a) Da α und β jeweils 60° sind, stehen für γ und δ noch $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$ zur Verfügung. Da $\gamma = \delta$ ist somit $\gamma = \frac{240}{2} = 120^\circ$. Der dritte Sektor wird vom Winkel γ dargestellt mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$.
- b) Es ist der Gewinnerwartungswert zu berechnen. Ist dieser Wert gleich dem Einsatz, so ist das Spiel fair.

Klausuraufschrieb

- a) $360^\circ - \alpha - \beta = \gamma + \delta$
 $\gamma + \delta = 240^\circ$
 Wegen $\gamma = \delta$ somit $\gamma = \frac{240}{2} = 120^\circ$.
 $P(\text{dritter Sektor}) = P(\gamma) = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$

b)

α	β	γ	δ
1,00 €	2,00 €	3,00 €	4,00 €
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$
$\frac{1}{6}$ €	$\frac{2}{6}$ €	$\frac{6}{6}$ €	$\frac{8}{6}$ €

$$E(X) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{6}{6} + \frac{8}{6} = \frac{17}{6} \approx 2,83$$

Wegen $E(X) \neq 3,00$ ist das Spiel nicht fair.

Lösung A2

Klausuraufschrieb

- a) In der Formel bedeuten die x_i die möglichen Werte der Zufallsvariablen X und $P(X = x_i)$ die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.
 Der Erwartungswert $E(X)$ gibt an, welcher Wert durchschnittlich bei einer großen Zahl von Durchführungen des Zufallsexperimentes zu erwarten ist.
- b) Man könnte mit dem Glücksrad folgendes Glücksspiel durchführen:
 Das Glücksrad wird einmal gedreht. Zeigt der Zeiger auf einen positiven Geldbetrag, so wird dieser dem Spieler ausbezahlt, ansonsten muss er 10 € zahlen.

$P(-10 \text{ €}) = \frac{1}{4}$; $P(2 \text{ €}) = \frac{3}{8}$; $P(4 \text{ €}) = \frac{3}{8}$. Die Zufallsvariable X , die den Gewinn des Spielers beschreibt, hat daher folgende Wahrscheinlichkeits-verteilung:

x_i	2 €	4 €	-10 €
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

Der Erwartungswert von X ist (s. Formel in der Aufgabenstellung):

$$E(X) = 2 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} - 10 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Wird dieses Spiel sehr häufig gespielt, so muss der Spieler mit einem mittleren Verlust von 0,25 € pro Spiel rechnen.

Lösung A3

Lösungslogik

- a) Die Aufgabe beschreibt vier unterschiedliche $P(X = x_i)$, die auf einem Glücksrad verteilt sind. Wir bestimmen damit die Mittelpunktswinkel des Glücksrades.
- b) Wir stellen eine Tabelle der x_i und $P(X = x_i)$ auf und wenden die Formel für den Erwartungswert an.

Klausuraufschrieb

- a) Das Glücksrad ist in vier Sektoren unterteilt mit jeweils
 $\alpha_1 = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ$; $\alpha_2 = \frac{1}{3} \cdot 360^\circ = 120^\circ$; $\alpha_3 = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ$; $\alpha_4 = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ$
- b) Ausgehend vom gegebenen Erwartungswert $E(X) = 0,5$ könnte bei einem Spieleinsatz von 3 € folgender „Gewinnplan“ aufgestellt werden:
- Sektor 1: kein Gewinn
 Sektor 2: 2 €
 Sektor 3: 5 €
 Sektor 4: 4 €

Die Tabelle hat folgendes Aussehen (aufsteigend sortiert):

Gewinnplan (x_i)	5 €	4 €	2 €	0 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
Auszahlung	$5 \cdot \frac{1}{6}$	$4 \cdot \frac{1}{4}$	$2 \cdot \frac{1}{3}$	$0 \cdot \frac{1}{4}$

$$E(X) = \frac{5}{6} \text{ €} + 1 \text{ €} + \frac{2}{3} \text{ €} = 2,50 \text{ €}$$

Felix muss auf lange Sicht gesehen 2,50 € auszahlen bei einem Einsatz von 3,00 €. Sein Gewinn pro Spiel beträgt somit im Durchschnitt 0,50 €.

Lösung A4

Lösungslogik

Wir wenden die Formel für den Erwartungswert an.

Klausuraufschrieb

$$E(X) = \frac{23}{6} = 0 \cdot a + 2 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot b$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 10b = \frac{23}{6}$$

$$10b = \frac{23}{6} - \frac{13}{6} = \frac{5}{3}$$

$$b = \frac{1}{6}$$

$$a + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

$$a = \frac{1}{4}$$

Die gesuchten Werte sind $a = \frac{1}{4}$ und $b = \frac{1}{6}$.

Lösung A5

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.

- a) Das Gegenereignis zu rot spätestens im dritten Zug ist dreimal keine rote Kugel zu ziehen.

- b) Die Zufallsvariable X kann die Werte von 1 bis 5 annehmen (5 Kugeln im Behälter).

Klausuraufschrieb

- a) A : „Rot spätestens im dritten Zug“

$\bar{A}$: „Nur schwarz in drei Zügen“

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$$

- b)

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1}$

$$E(X) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

Durchschnittlich muss man mit 3 Zügen rechnen, bis die rote Kugel gezogen wird.

Lösung A6

Lösungslogik

Bei Würfelexperimenten lohnt es sich, eine Ereignistabelle aufzustellen. Der Ereignisraum für A ist nebenstehend orange markiert, für B darunter ebenfalls in orange. Zusätzliche Felder für Aufgabenteil b) in lila.

- b). Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn von Max in Spielchips an. X kann die Werte -1 , 4 und 5 annehmen.

Wertigkeit jedes Ereignisses ist $\frac{1}{36}$

	1x	2x	3x	4x	5x	6x
1x	11x	12x	13x	14x	15x	16x
2x	21x	22x	23x	24x	25x	26x
3x	31x	32x	33x	34x	35x	36x
4x	41x	42x	43x	44x	45x	46x
5x	51x	52x	53x	54x	55x	56x
6x	61x	62x	63x	64x	65x	66x

Klausuraufschrieb

a) $P(A) = 10 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$

$$P(B) = 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$$

- b) X entspricht der Zufallsvariablen für den Gewinn von Max. Die Wahrscheinlichkeiten für X sind:

$$P(X = 4) = P(B) = \frac{1}{9}$$

$$P(X = 5) = \frac{1}{18}$$

$$P(X = -1) = \frac{5}{6}$$

$$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{1}{18} + (-1) \cdot \frac{5}{6} = -\frac{1}{9}$$

Da der Erwartungswert für den Gewinn von Max nicht null ist, ist das Spiel nicht fair.

Wertigkeit jedes Ereignisses ist $\frac{1}{36}$

	1x	2x	3x	4x	5x	6x
1x	11x	12x	13x	14x	15x	16x
2x	21x	22x	23x	24x	25x	26x
3x	31x	32x	33x	34x	35x	36x
4x	41x	42x	43x	44x	45x	46x
5x	51x	52x	53x	54x	55x	56x
6x	61x	62x	63x	64x	65x	66x

Lösung A7

Lösungslogik

Berechnung über den Erwartungswert. Ein Spiel ist dann fair, wenn $E(X) = 0$ ist. Wir stellen eine Tabelle auf, wobei in diesem Falle, in dem der Einsatz bekannt ist, die Einzelgewinne um den Einsatz zu reduzieren sind.

Klausuraufschrieb

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

x_i	2,50 €	0,5 €	-0,50 €	-1,50 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = 2,50 \cdot \frac{1}{2} + 0,50 \cdot \frac{1}{4} + (-0,50) \cdot \frac{1}{8} + (-1,50) \cdot \frac{1}{8} = 1,13 \text{ €}$$

Wegen $E(X) \neq 0$ ist das Spiel nicht fair. Auf lange Sicht gesehen verliert der Spielbetreiber etwa 1,13 € /Spiel.

Lösung A8

Lösungslogik

Wir bestimmen zunächst die Wahrscheinlichkeiten für drei Karten gleicher Farbe. Es handelt sich um insgesamt 16 Karten, wovon jeweils 4 Karten die gleiche Farbe haben.

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Die Wahrscheinlichkeit einer einzelnen Kombination beträgt $p = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{1}{140}$.

Wegen der vier Kartenfarben also $4 \cdot \frac{1}{140} = \frac{1}{35}$.

Die gleiche Logik gilt für vier Karten desselben Wertes.

Klausuraufschrieb

Anzahl der Karten ist 16 wovon jeweils 4 Karten die gleiche Farbe und jeweils 4 Karten denselben Wert haben.

G : „Drei Karten mit gleichem Wert.“

F : „Drei Karten mit gleicher Farbe.“

$$P(G) = \binom{4}{3} \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = 4 \cdot \frac{1}{140} = \frac{1}{35}$$

$$P(F) = \binom{4}{3} \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = 4 \cdot \frac{1}{140} = \frac{1}{35}$$

Für den Erwartungswert $E(X)$ gilt:

Die Zufallsvariable X kann die Werte $x_1 = 15 \text{ €}$ für dreimal die gleiche Farbe, $x_2 = a \text{ €}$ für dreimal den gleichen Wert und $x_3 = -1 \text{ €}$ für keines von beidem annehmen. Es gilt:

x_i	15 €	$a \text{ €}$	-1,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{33}{35}$

$$E(X) = 15 \cdot \frac{1}{35} + a \cdot \frac{1}{35} + (-1) \cdot \frac{33}{35} = 0 \Rightarrow a = 18$$

Der Gewinn für drei Karten mit gleichem Wert muss 18 € betragen, damit das Spiel fair ist.

Aufgabe A1

Ein Glücksrad besteht aus 3 Feldern, die folgendermaßen beschriftet sind:

- 1 . Feld: 2,00 €
- 2 . Feld: 5,00 €
- 3 . Feld: 0,00 €

Das 1 . Feld hat einen Mittelpunktswinkel von 90° . Das 2 .Feld und das 3.Feld haben jeweils denselben Mittelpunktswinkel.

Es wird folgendes Glücksspiel angeboten:

Der Spieler zahlt einen Einsatz von 3,00 € und darf einmal an dem Glücksrad drehen.

Die Feldbeschriftungen geben an, wie viel Euro an den Spieler ausbezahlt werden, wenn das Glücksrad auf dem Feld stehen bleibt.

Bestimme den erwarteten Gewinn für den Spieler.

Aufgabe A2

In einer Urne befinden sich Kugeln mit der Aufschrift + 2,00 €, + 5,00 € und – 7,00 €.

Die Wahrscheinlichkeit, dass man Kugeln mit + 2,00 € bzw. + 5,00 € zieht, beträgt jeweils 0,3.

Ein Spieler zieht zweimal hintereinander eine Kugel mit Zurücklegen und notiert jeweils ihre Zahl.

Die Summe dieser beiden Zahlen (unter Berücksichtigung des Vorzeichens) geben an, wie viel Euro der Spieler ausbezahlt bekommt (bei positivem Vorzeichen) bzw. was der Spieler bezahlen muss (bei negativem Vorzeichen).

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler bei einem Spiel Geld gewinnt?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler bei fünf Spielen genau dreimal gewinnt.
- c) Wie viele Spiele müssen gespielt werden, damit der Spielanbieter mit Einnahmen von ca. 1.000 € rechnen kann?

Aufgabe A3

Aus einem Beutel mit zwölf 50-Cent-Münzen, fünf 1€- Münzen und acht 2€-Münzen werden zufällig zwei Münzen gezogen.

Welchen Geldbetrag wird man bei häufiger Versuchsdurchführung durchschnittlich herausziehen?



Aufgabe A4

Bei einem Glücksspiel mit dem Einsatz 1 € gibt die Zufallsvariable G den Gewinn (d. h. die Differenz zwischen Auszahlung und Einsatz) in € an.

Die folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von G an.

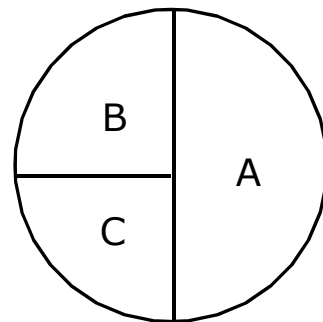
g in €	-1	0	1	4
$P(G = g)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$

- Berechne den Erwartungswert von G .
- Wie groß muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?
- Ändere die maximale Auszahlung so ab, dass das Spiel bei einem Einsatz von 1 € fair ist.

Aufgabe A5

Bei einer Lotterie zahlt man den Einsatz von 0,50 € und darf dann das Glücksrad zweimal drehen. Bei zwei Feldern mit gleicher Bezeichnung wird 1 € ausbezahlt, sonst nichts.

- Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen "Gewinn in €" an.
- Berechne den Erwartungswert für den Gewinn.
- Kann man den Einsatz so ändern, dass die Lotterie fair ist ?



Aufgabe A6

In einem Zeitungsartikel wurde eine Statistik über die Anzahl von Fehlern in Zeitungsartikeln erstellt. Danach sind auf 17 % der Seiten keine Druckfehler, auf 30 % der Seiten ist ein Druckfehler, auf 27 % der Seiten sind zwei, auf 16 % der Seiten drei und auf dem Rest mindestens vier Druckfehler.

Wie viele Druckfehler sind durchschnittlich mindestens auf einer Zeitungsseite zu erwarten?

Aufgabe A7

In einer Urne sind 4 weiße und 6 schwarze Kugeln. Ein Spieler zieht nacheinander eine

Kugel ohne zurücklegen. Das Spiel ist aus, wenn er eine weiße Kugel zieht oder wenn er dreimal gezogen hat. Die Zufallsvariable X steht für die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.

- Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X .
- Der Spieleinsatz beträgt 10 €. Der Spieler erhält 30 €, wenn er drei schwarze Kugeln gezogen hat. Er erhält 20 €, wenn er zwei schwarze Kugeln zieht. In allen anderen Fällen erhält er nichts. Welchen mittleren Gewinn (oder Verlust) hat der Spieler auf lange Sicht je Spiel zu erwarten? Wie hoch müsste der Spieleinsatz ungefähr sein, damit das Spiel fair ist?

Aufgabe A8

In einer Urne sind 2 blaue, 3 rote und 5 weiße Kugeln. Ein Spieler zieht nacheinander ohne Zurücklegen 3 Kugeln. Der Spieler erhält 6 €, wenn alle drei gezogenen Kugeln dieselbe Farbe haben. Er erhält 2 €, wenn die drei Kugeln unterschiedliche Farben aufweisen. Bei allen anderen Ausgängen muss der Spieler 1,50 € bezahlen.

Wie viel gewinnt oder verliert der Spieler je Spiel im Mittel auf "lange Sicht"?

Aufgabe A9

Mit zwei Urnen und einem Glücksrad wird ein Glücksspiel durchgeführt. Die beiden Urnen U_1 und U_2 haben folgende Inhalte:

U_1 : 4 rote, 1 blaue und 5 weiße Kugeln

U_2 : 1 rote und 9 weiße Kugeln

Die Zahlen des Glücksrads treten mit folgender Wahrscheinlichkeit auf:

1	2	3	4	5	6
0,2	0,05	0,35	0,1	0,2	0,1

Das Glücksspiel hat folgende Regeln:

Das Glücksrad wird einmal gedreht. Erscheint eine gerade Zahl, so wird zweimal mit Zurücklegen aus U_2 gezogen, erscheint eine ungerade Zahl, so wird zweimal mit Zurücklegen aus U_1 gezogen.

Zieht ein Spieler dabei zwei weiße Kugeln oder keine weiße Kugel, so erhält er 1 €, sonst zahlt er 1,50 €.

Prüfe, ob das Spiel fair ist.

Lösung A9

Klausuraufschrieb

$$P(1. Feld) = \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}; \quad P(2. Feld) = \frac{360^\circ - 90^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}; \quad P(3. Feld) = \frac{3}{8}.$$

1. Feld	2. Feld	3. Feld
2,00 €	5,00 €	0,00 €
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
0,50 €	1,88 €	0 €

$$E(X) = 0,50 \text{ €} + 1,88 \text{ €} + 0 \text{ €} = 2,38 \text{ €}$$

Da der Spieler einen Einsatz von 3,00 € leisten muss beträgt der erwartete Gewinn für den Spieler $2,38 \text{ €} - 3,00 \text{ €} = -0,62 \text{ €}$.

Der Spieler macht auf lange Sicht gesehen pro Spiel einen Verlust von 0,62 €.

Lösung A10

Klausuraufschrieb

Ereignisraum:

$$E = \{(2; 2), (2; 5), (5; 2), (2; -7), (-7; 2), (5; 5), (5; -7), (-7; 5), (-7; -7)\}$$

Wahrscheinlichkeiten:

$$P(-7; -7) = P(X = -14) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$$

$$P(5; 5) = P(X = 10) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$$

$$P(2; 2) = P(X = 4) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$$

$$P((5; -7), (-7; 5)) = P(X = -2) = 2 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,24$$

$$P((2; -7), (-7; 2)) = P(X = -5) = 2 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,24$$

$$P((2; 5), (5; 2)) = P(X = 7) = 2 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,18$$

a) $P(\text{Spieler gewinnt}) = P(X > 0) = 0,09 + 0,09 + 0,18 = 0,36.$

$$P(\text{Spieler verliert}) = 1 - P(\text{Spieler gewinnt}) = 1 - 0,36 = 0,64$$

b) Aus a) folgt eine Binomialverteilung mit $n = 5$, $p = 0,36$ für Gewinn und $X = 3$ für 3 Gewinne.

$$B_{5;0,36}(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0,36^3 \cdot 0,64^2 = 0,1911 \approx 19 \%$$

c) *Berechnung des Erwartungswertes $E(X)$:*

x_i	10 €	7 €	4 €	-2 €	-5 €	-14 €
$P(X = x_i)$	0,09	0,18	0,09	0,24	0,24	0,16
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,90 €	1,26 €	0,36 €	-0,48 €	-1,20 €	-2,24 €

$$E(X) = 0,90 + 1,26 + 0,36 - 0,48 - 1,20 - 2,24 = -1,40 \text{ €}$$

Der mittlere Verlust des Spielers/Spiel beträgt 1,40 €. Dies ist der Gewinn des Spielebetreibers.

Anzahl Spiele für Verdienst von 1000 €:

$$\frac{1000 \text{ €}}{1,40 \text{ €}} = 714,29$$

Es müssen etwa 715 Spiele gespielt werden, damit der Spielebetreiber einen Gewinn von 1000 € hat.

Lösung A11

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen zweier Münzen entspricht zweimaliges Ziehen hintereinander ohne Zurücklegen.

Aufstellung des Ereignisraums und Berechnung der Wahrscheinlichkeiten.

Klausuraufschrieb

Ereignisraum:

$$E = \{(0,50; 1), (1; 0,50), (0,50; 2), (2; 0,50), (1; 2); (2; 1), (0,50; 0,50), (1; 1), (2; 2)\}$$

Wahrscheinlichkeiten:

$$P(0,50 \text{ €}; 0,50 \text{ €}) = P(X = 1 \text{ €}) = \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} = \frac{132}{600}$$

$$P(1 \text{ €}; 1 \text{ €}) = P(X = 2 \text{ €}) = \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} = \frac{20}{600}$$

$$P(2 \text{ €}; 2 \text{ €}) = P(X = 4 \text{ €}) = \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} = \frac{56}{600}$$

$$P((0,50 \text{ €}; 1 \text{ €}), (1 \text{ €}; 0,50 \text{ €})) = P(X = 1,50 \text{ €}) = 2 \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{24} = \frac{120}{600}$$

$$P((0,50 \text{ €}; 2 \text{ €}), (2 \text{ €}; 0,50 \text{ €})) = P(X = 2,50 \text{ €}) = 2 \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{8}{24} = \frac{192}{600}$$

$$P((1 \text{ €}; 2 \text{ €}), (2 \text{ €}; 1 \text{ €})) = P(X = 3 \text{ €}) = 2 \cdot \frac{5}{25} \cdot \frac{8}{24} = \frac{80}{600}$$

Berechnung des Erwartungswertes $E(X)$:

x_i	1 €	2 €	4 €	1,50 €	2,50 €	3 €
$P(X = x_i)$	$\frac{132}{600}$	$\frac{20}{600}$	$\frac{56}{600}$	$\frac{120}{600}$	$\frac{192}{600}$	$\frac{80}{600}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,22 €	0,07 €	0,37 €	0,30 €	0,80 €	0,40 €

$$E(X) = 0,22 + 0,07 + 0,37 + 0,30 + 0,80 + 0,40 = 2,16 \text{ €}$$

Man kann bei häufiger Versuchsdurchführung durchschnittlich mit 2,16 € rechnen.

Lösung A12

Klausuraufschrieb

a) Erwartungswert von G :

g in €	-1	0	1	4
$P(G = g)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$
$g \cdot P(G = g)$	-0,67	0	0,10	0,27

$$E(G) = -0,67 + 0 + 0,10 + 0,27 = -0,30$$

b) Gemäß a) macht der Spieler pro Spiel einen Verlust von 0,30 €. Der Einsatz muss somit auf 0,70 € gesenkt werden, damit das Spiel fair ist.

c)

g in €	-1	0	1	a
$P(G = g)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$
$g \cdot P(G = g)$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}a$

$$E(G) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}a = 0$$

$$\frac{1}{15}a = \frac{17}{30} \Rightarrow a = 8,50$$

Aufgrund des Einsatzes von 1 € muss der maximale Auszahlung auf 9,50 € angehoben werden, damit das Spiel fair ist.

Lösung A13

Klausuraufschrieb

a) **Ereignisraum:**

$$E = \{(A; A), (B; B), (C; C), (\bar{A}; \bar{A} \wedge \bar{B}; \bar{B} \wedge \bar{C}; \bar{C})\}$$

Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A; A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \quad P(B; B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}; \quad P(C; C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(\text{Gewinn}) = P(A; A) + P(B; B) + P(C; C) = \frac{3}{8}$$

b)

x_i	0,50 €	-0,50 €
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,1875	-0,3125

$$G(X) = 0,1875 - 0,3125 = -0,125$$

c) Da bei dem Einsatz von 0,50 € der erwartete Verlust des Spielers 0,125 € beträgt, müsste der Einsatz um 0,125 € gesenkt werden, also 0,375 € betragen.

Da ein Einsatz mit einem „halben Eurocent“ nicht möglich ist, kann der Einsatz nicht so geändert werden, damit die Lotterie fair ist.

Lösung A14

Klausuraufschrieb

Wahrscheinlichkeiten:

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Druckfehler / Seite an.

$$P(X = 0) = 0,17$$

$$P(X = 1) = 0,3$$

$$P(X = 2) = 0,27$$

$$P(X = 3) = 0,16$$

$$P(X \geq 4) = 1 - 0,3 - 0,27 - 0,16 - 0,17 = 0,10$$

Erwartungswert:

Wegen $P(X \geq 4)$ kann der Erwartungswert von X nicht exakt berechnet werden.

Wenn wir jedoch $P(X = 4) = 0,1$ unterstellen, erhalten wir mit $E(X)$ eine untere Grenze für den möglichen tatsächlichen Erwartungswert.

Da nach durchschnittlicher Druckfehleranzahl gefragt ist, die sich mindestens auf einer Zeitungsseite befinden, ist dies auch die gesuchte Größe.

$$E(XA) = 0 \cdot 0,17 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,27 + 3 \cdot 0,16 + 4 \cdot 0,1 = 1,72$$

Es sind durchschnittlich mindestens 1,72 Fehler auf einer Zeitungsseite.

Lösung A15

Klausuraufschrieb

a) **Ereignisraum:**

$$E = \{(\text{weiß}), (\text{schwarz}; \text{weiß}), (\text{schwarz}; \text{schwarz}; \text{weiß}), (\text{schwarz}; \text{schwarz}; \text{schwarz})\}$$

Wahrscheinlichkeiten:

$$P(\text{weiß}) = P(X = 0)$$

$$P(\text{schwarz}; \text{weiß}) = P(X = 1)$$

$$P(\text{schwarz}; \text{schwarz}; \text{weiß}) = P(X = 2)$$

$$P(\text{schwarz}; \text{schwarz}; \text{schwarz}) = P(X = 3)$$

$$P(X = 0) = \frac{4}{10}$$

$$P(X = 1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{90}$$

$$P(X = 2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{120}{720}$$

$$P(X = 3) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{120}{720}$$

b)

x_i	20 €	10 €	-10 €
$P(X = x_i)$	$\frac{120}{720}$	$\frac{120}{720}$	$\frac{480}{720}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	3,33 €	1,67 €	-6,67 €

$$E(X) = 3,33 \text{ €} + 1,67 \text{ €} - 6,67 \text{ €} = -1,67 \text{ €}$$

Der Spieler hat einen mittleren Verlust von 1,67 € pro Spiel.

Einsatz für faires Spiel:

Da der Spieler durchschnittlich 1,67 € pro Spiel Verlust macht, müsste der Einsatz um 1,67 € vermindert werden.

Der Einsatz für ein faires Spiel müsste 8,33 € betragen.

Lösung A16

Klausuraufschrieb

Ereignisse:

A: „Drei Kugeln gleiche Farbe“

B: „Drei Kugeln unterschiedliche Farbe“

C: „Weder Ereignis A noch Ereignis B“

Wahrscheinlichkeiten

$$P(A) = P(rrr; www) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{11}{120}$$

$$P(B) = P(rwb; rbw; wrb; wbr; brw; bwr) = 3! \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{8} = 6 \cdot \frac{30}{720} = \frac{1}{4}$$

$$P(C) = 1 - (P(A) + P(B)) = 1 - \frac{66}{720} - \frac{180}{720} = \frac{79}{120}$$

Erwartungswert:

x_i	6 €	2 €	-1,50 €
$P(X = x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{79}{120}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,55 €	0,50 €	-0,9875 €

$$E(X) = 0,55 + 0,50 - 0,9875 = 0,0625$$

Auf lange Sicht gesehen gewinnt der Spieler etwa 0,06 € pro Spiel.

Lösung A17

Klausuraufschrieb

Ereignisse:

A: „Glücksrad zeigt gerade Zahl“

B: „Glücksrad zeigt ungerade Zahl“

C: „U1 (w, w) $\vee$ ($\overline{w}$, $\overline{w}$)“

D: „U2 (w, w) $\vee$ ($\overline{w}$, $\overline{w}$)“

Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = 0,25; \quad P(B) = 0,75; \quad P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,5; \quad P(D) = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0,82$$

$$P(1 \text{ € Gewinn}) = P(A \cap D) + P(B \cap C) = 0,25 \cdot 0,82 + 0,75 \cdot 0,5 = 0,58$$

$$P(1,50 \text{ € kein Gewinn}) = 1 - P(1 \text{ € Gewinn}) = 0,42$$

Erwartungswert:

$$E(X) = 1 \cdot 0,58 - 1,50 \cdot 0,42 = -0,05$$

Das Spiel ist nicht fair, der Spieler verliert auf lange Sicht pro Spiel 0,05 €.

Aufgabe A1

Die SMV des ASG unterstützt jedes Jahr ein soziales Kinder- oder Jugendprojekt. Das Geld wird auf dem Schulfest mit einem Informationsstand und einem Glücksrad erwirtschaftet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Folgende Gewinne sind vorgesehen:

Das Rad bleibt zweimal auf Elefant stehen: 5,00 €

Das Rad bleibt zweimal auf Löwe stehen: 3,00 €

Das Rad bleibt zweimal auf Strauß stehen: 1,50 €

Die Einsätze hängen vom Alter der Kinder ab:

Schülerinnen/Schüler, Kinder und Jugendliche 0,50 €

Erwachsene 1,00 €



- a) Ermittle die Erwartungswerte der SMV getrennt für Schülerinnen/Schüler, Kinder und Jugendliche sowie für Erwachsene.
- b) Die Endabrechnung am Ende des Schulfestes weist folgende Daten auf:
 Anzahl der Spiele von Schülerinnen/Schüler, Kindern und Jugendlichen: 372
 Anzahl der Spiele Erwachsener: 214
 Gesamtgewinn: 217,50 €
 Ermittle die Abweichung zwischen dem mit den Erwartungswerten ermittelten Gewinn und dem tatsächlichen Gewinn. Nenne mögliche Gründe für die festgestellte Abweichung.

Aufgabe A2

Die Abschlussklassen des Linden-Gymnasiums in Tuttlingen organisieren zugunsten eines sozialen Projekts eine Tombola. Die Tabelle zeigt die Losverteilung und die damit jeweils verbundenen Gewinne.

Anzahl der Lose	Wert des Gewinns
150 Nieten	Kein Gewinn
40 Kleingewinne	Je 4,00 €
10 Hauptgewinne	Je 20,00 €

Ein Los kostet 2,00 €.

- a) Berechne den Erwartungswert.
- b) Um den Gewinn für das soziale Projekt zu erhöhen, geben die Klassen 50 weitere Nieten in die Lostrommel.
 Welchen Betrag können die Abschlussklassen spenden, wenn alle Lose verkauft werden?

Aufgabe A3

Bei einer Wohltätigkeitsveranstaltung führt die Klasse 12 des ASG Heilbronn ein Glücksspiel durch.

Die Sektoren des dafür verwendeten Glücksrades sind rot, gelb und blau gefärbt.

Die Wahrscheinlichkeit für Rot beträgt 25 %, für Gelb $\frac{1}{3}$.

Das Glücksrad wird einmal gedreht.

Folgender Gewinnplan ist vorgesehen:

Farbe	Gewinn
Rot	4,00 €
Gelb	1,50 €
Blau	0,60 €

Pro Spiel werden 2,00 € Einsatz verlangt.

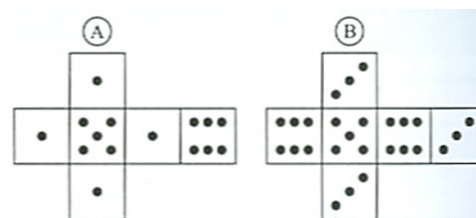
- Berechne den Erwartungswert.
- Die Klasse möchte ihren zu erwartenden Gewinn pro Spiel verdoppeln. Dabei soll das Glücksrad und der Einsatz pro Spiel nicht verändert werden. Stelle einen möglichen Gewinnplan auf.

Aufgabe A4

Die beiden Netze zeigen die Augenzahlen zweier besonderer Spielwürfel.

Beide Würfel werden gleichzeitig geworfen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine „Sechs“ zu werfen?



Die beiden Würfel werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft. Berechne den Erwartungswert.

Wurfergebnisse	Gewinn
Gleiche Augenzahlen (Pasch)	9,00 €
Verschiedene Augenzahlen	Kein Gewinn

Einsatz pro Spiel: 1,00 €

Der Veranstalter möchte beim Würfelnetz **A** die „Fünf“ durch eine „Sechs“ ersetzen.

Der Gewinnplan soll gleich bleiben. Wäre dies für ihn vorteilhaft? Begründe.

Hinweis

Bei Aufgaben mit dem Erwartungswert wird empfohlen, unmittelbar eine Tabelle der x_i und $P(X = x_i)$ sowie $x_i \cdot P(X = x_i)$ anzulegen.

Lösung A1

Lösungslogik

- a) Aufstellung einer 3-zeilige Tabelle mit Spaltenanzahl = Gewinnanzahl. Ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die Gewinne ungleich 100 %, muss eine weitere Spalte für den Einsatz zugefügt werden.
Die Zeile x_i enthält die einzelnen Gewinnbeträge. Ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die Gewinne ungleich 100 %, muss der Einsatz vom Gewinnbetrag abgezogen werden und der Einsatz wird mit einem Minuszeichen in die letzte Zeilenspalte x_i eingetragen.
Die Zeile $P(X = x_i)$ enthält die Einzelwahrscheinlichkeiten für Gewinn und Einsatz. In der dritten Zeile $x_i \cdot P(X = x_i)$ werden spaltengerecht die Gewinnbeträge sowie der Einsatzbetrag mit ihren jeweiligen Wahrscheinlichkeiten multipliziert.
Am Ende werden alle Werte der dritten Zeile vorzeichengerecht addiert. Das daraus sich ergebende Ergebnis ist der gesuchte Erwartungswert.
- b) Vergleich der Einnahmen aus den Erwartungswerten mit denen der echten Einnahmen.

Klausuraufschrieb

Aufstellen der Wahrscheinlichkeiten zu den Gewinnen:

$$P(\text{zweimal Elefant}) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64} \quad P(\text{zweimal Löwe}) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{4}{64}$$

$$P(\text{zweimal Strauß}) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64} \quad P(\text{kein Gewinn}) = 1 - P(\text{Gewinn}) = 1 - \frac{1}{64} - \frac{4}{64} - \frac{1}{64} = \frac{58}{64}$$

- a) **Berechnung der Erwartungswerte**

Tabelle für Schülerinnen/Schüler, Kinder und Jugendliche:

Gewinn/Einsatz (x_i)	4,50 €	2,50 €	1,00 €	–0,50 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{58}{64}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,07 €	0,16 €	0,02 €	–0,45 €
$E(X)$	0,07 € + 0,16 + 0,02 – 0,45 € = –0,20 €			

$$E(X)_{\text{Jugend}} = -0,20 \text{ €}$$

Tabelle für Erwachsene:

Gewinn/Einsatz (x_i)	4,00 €	2,00 €	0,50 €	–1,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{58}{64}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,06 €	0,13 €	0,01 €	–0,90 €
$E(X)$	0,06 € + 0,13 + 0,01 – 0,90 € = –0,70 €			

$$E(X)_{\text{Erwachsene}} = -0,70 \text{ €}$$

Die SMV kann mit einem Gewinn von 0,20 € pro Spiel bei den Jugendlichen und von 0,70 € pro Spiel bei den Erwachsenen rechnen.

- b) *Abweichung zwischen Erwartungswert und Gesamtgewinn:*

$$372 \cdot 0,20 \text{ €} + 214 \cdot 0,70 \text{ €} = 224,20 \text{ € Gewinn nach Erwartungswert}$$

$$G_{E(X)} - G_{\text{gesamt}} = 224,20 - 217,50 = 6,70 \text{ €}$$

Die Abweichung des tatsächlichen Gewinns zum Erwartungswert beträgt 6,70 €.

Der mit den Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung ermittelte Gesamtgewinn 224,20 € ist ein theoretischer Wert. Im konkreten Fall kann er nicht erreicht werden, da der Gesamtgewinn aufgrund der Einsätze und Preise ein Vielfaches von 0,50 € sein muss.

Lösung A2

Lösungslogik

- a) Aufstellung einer 3-zeiligen Tabelle wie in Lösung A9 beschrieben.
 b) Aufstellung der Tabelle mit erhöhter Losanzahl und Neuberechnung des Erwartungswertes.

Klausuraufschrieb

a) $P(20 \text{ €}) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$ $P(4 \text{ €}) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$ $P(-2 \text{ €}) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$

Berechnung des Erwartungswertes:

x_i	18 €	2 €	-2,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,90 €	0,40 €	-1,50 €

$$E(X) = 0,9 + 0,40 - 1,50 = -0,20 \text{ €}$$

- b) *Neuberechnung nach Erhöhung der Losanzahl:*

$$P(20 \text{ €}) = \frac{10}{250} = \frac{1}{25} \quad P(4 \text{ €}) = \frac{40}{250} = \frac{4}{25} \quad P(-2 \text{ €}) = \frac{200}{250} = \frac{4}{5}$$

Berechnung der Erwartungswerte

x_i	18 €	2 €	-2,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{5}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,72 €	0,32 €	-1,60 €

$$E(X) = 0,72 + 0,32 - 1,60 = -0,56 \text{ €}$$

Verkauf aller Lose:

$$G = n \cdot |EX| = 250 \cdot 0,56 = 140 \text{ €}$$

Die Schüler der Abschlussklasse können 140 € spenden, wenn alle Lose verkauft werden.

Lösung A3

Lösungslogik

- Aufstellung einer 3-zeilige Tabelle wie in Lösung A19 beschrieben, jedoch ohne Spalte für den Einsatz, da die gegebenen Wahrscheinlichkeiten in der Summe 100 % ergeben. Berechnung des Erwartungswertes.
- Berechnung eines neuen Gewinnplans für den Erwartungswert 0,5.

Klausuraufschrieb

$$a) \quad P(\text{rot}) = \frac{1}{4} \quad P(\text{gelb}) = \frac{1}{3} \quad P(\text{blau}) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

Berechnung der Erwartungswerte

x_i	4 €	1,50 €	0,60 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	1,00 €	0,50 €	0,25 €

$$E(X) = 1,00 + 0,50 + 0,25 = 1,75 \text{ €}$$

$$\text{Gewinn pro Spiel: } \text{Gewinn} = \text{Einsatz} - E(X) = 2,00 - 1,75 = 0,25 \text{ €}$$

- Verdoppelung des Gewinns:*

$$2 \cdot 0,25 = 0,50 = 2,00 - E(X) \Rightarrow E(X) = 1,50$$

Mit einer Veränderung des Gewinns von 4 € auf 3 € ergibt sich:

$$E(X) = 3 \cdot \frac{1}{4} + 1,50 \cdot \frac{1}{3} + 0,60 \cdot \frac{5}{12} = 0,75 + 0,50 + 0,25 = 1,50 \text{ €}$$

Der Gewinnplan muss von 4 € auf 3 € verändert werden, damit die Klasse den doppelten Gewinn macht.

(Andere Lösungen denkbar).

Lösung A4

Lösungslogik

Wahrscheinlichkeit „mindestens eine Sechs“:

Wir stellen die Wahrscheinlichkeit einer Sechs für Würfel A und Würfel B auf.

Würfel A hat nur eine Sechs, also $P(6_A) = \frac{1}{6}$. Würfel B hat zwei Sechsen, also

$$P(6_B) = \frac{2}{6}.$$

Mindestens eine Sechs bedeutet eine Sechs oder zwei Sechsen. Am Wort „mindestens“ erkennen wir, dass der schnellste Lösungsweg über das Gegenereignis führt, denn „mindestens eine Sechs“ ist dasselbe wie $1 - \text{„keine Sechs“}$. Keine Sechs bei Würfel A ist $P(\overline{6_A}) = \frac{5}{6}$, bei Würfel B jedoch $P(\overline{6_B}) = \frac{4}{6}$.

Erwartungswert:

Zunächst müssen wir die Einzelwahrscheinlichkeiten für die Ereignisse „Pasch“ bestimmen. Aufgrund des Aufbaus der beiden Würfel sind nur die Ereignisse $\{5; 5\}$ und $\{6; 6\}$ möglich. $P(6_A)$ und $P(6_B)$ sind bereits bekannt, $P(5_A) = P(5_B) = \frac{1}{6}$.

Wir bestimmen nun den Erwartungswert über eine Tabelle.

Ersatz der „Fünf“ bei Würfel A durch eine „Sechs“:

Durch den Ersatz ist nunmehr ein 5-er Pasch ausgeschlossen, es ist nur noch ein 6-er Pasch möglich, wobei jetzt $P(6_A) = P(6_B) = \frac{2}{6}$ ist. Wir berechnen den

Erwartungswert neu und vergleichen diesen mit dem Vorwert.

Klausuraufschrieb

$$P(6_A) = \frac{1}{6}$$

$$P(\overline{6_A}) = \frac{5}{6}$$

$$P(6_B) = \frac{2}{6}$$

$$P(\overline{6_B}) = \frac{4}{6}$$

$$P(\text{mindestens 1 Sechs}) = 1 - P(\text{keine Sechs})$$

$$= 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = 1 - \frac{20}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \approx 44,4 \%$$

Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt 44,4 %.

Erwartungswert:

$$P(\text{Pasch}) = P\{(5; 5), (6; 6)\} = P(5; 5) + P(6; 6)$$

$$P(5; 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \quad P(6; 6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{36}$$

$$P(\text{Pasch}) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P(\text{Gewinn})$$

$$P(\overline{\text{Gewinn}}) = 1 - P(\text{Gewinn}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

Gewinn/Einsatz (x_i)	8,00 €	-1,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$\frac{8}{12} \text{ €}$	$-\frac{11}{12} \text{ €}$
$E(X)$	$\frac{8}{12} \text{ €} - \frac{11}{12} \text{ €} = -\frac{3}{12} \text{ €} = -0,25 \text{ €}$	

Der Erwartungswert ist $E(X) = -0,25$.

Ersatz der „Fünf“ bei Würfel A

Es ist nur noch das Ereignis $\{6; 6\}$ möglich.

$$P(6_A) = P(6_B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{Gewinn}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

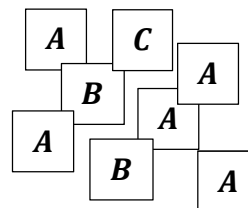
$$P(\overline{\text{Gewinn}}) = 1 - P(\text{Gewinn}) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Gewinn/Einsatz (x_i)	8,00 €	-1,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$\frac{8}{9} \text{ €}$	$-\frac{8}{9} \text{ €}$
$E(X)$	$\frac{8}{9} \text{ €} - \frac{8}{9} \text{ €} = 0 \text{ €}$	

Der Erwartungswert nach Ersatz der „Fünf“ bei Würfel A ist 0, d.h., das Spiel ist fair, das Ersetzen wäre für den Veranstalter nicht vorteilhaft.

Aufgabe A1

Acht gleich große Karten sind mit den Buchstaben A , B und C beschriftet. Die Karten liegen so auf dem Tisch, dass die Buchstaben nicht sichtbar sind. Es werden zwei Karten gleichzeitig gezogen.



- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Karten mit verschiedenen Buchstaben zu ziehen?
- Die Karten sollen für ein Glücksspiel verwendet werden. Untenstehende Gewinnpläne werden geprüft. Für welchen Gewinnplan soll sich der Betreiber entscheiden? Begründen Sie Ihre Aussage.

Ergebnis der Ziehung	Gewinnplan 1	Gewinnplan 2
Zwei gleiche Buchstaben	3,00 €	5,00 €
Der Buchstabe C ist gezogen	5,00 €	3,00 €
Restliche Möglichkeiten	kein Gewinn	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel: 2,50 €		

Aufgabe A2

In einem Kartenstapel liegen zwölf Karten. Die Verteilung ist in der Tabelle dargestellt. Die Karten werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Zwei Karten werden gleichzeitig gezogen.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote und eine schwarze Karte zu erhalten?

Kartenfarbe			
schwarz		rot	
			
Kreuz	Pik	Herz	Karo
Anzahl			
6	1	2	3

Die zwölf Karten werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Es sollen ebenfalls zwei Karten gleichzeitig gezogen werden. Dazu wird der nebenstehende Gewinnplan geprüft.

Ergebnisse	Gewinn
Zweimal Karo	10,00 €
Zweimal Herz	5,00 €
Sonstige	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 1,00 €	

- Berechne den Erwartungswert.
- Sophie macht den Vorschlag, den Gewinn für „zweimal Karo“ auf 20,00 € hochzusetzen und alles andere zu belassen. Der Betreiber des Glücksspiels protestiert und behauptet, er würde dann Verlust machen. Hat der Betreiber Recht? Begründe durch Rechnung.

Hinweis

Bei Aufgaben mit dem Erwartungswert wird empfohlen, unmittelbar eine Tabelle der x_i und $P(X = x_i)$ sowie $x_i \cdot P(X = x_i)$ anzulegen.

Lösung A1

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen von zwei Karten entspricht Ziehen von zwei Karten hintereinander ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit für zwei Karten mit unterschiedlichen Buchstaben ist die Wahrscheinlichkeit der Einzelereignisse $P(A; B)$, $P(B; A)$, $P(B; C)$, $P(C; B)$, $P(A; C)$ und $P(C; A)$. Einfacher ist hier der Weg über das Gegenereignis, nämlich $1 - P(\text{zwei gleichen Buchstaben})$.

Für die Prüfung der Gewinnpläne erstellen wir eine Tabelle zur Errechnung der Erwartungswerte.

Klausuraufschrieb

$$P(A; A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56}; \quad P(B; B) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{56}; \quad P(C; C) = 0$$

$$P(\text{zwei unterschiedliche Buchstaben}) = 1 - P(\text{zwei gleichen Buchstaben}) \\ = 1 - \frac{22}{56} = \frac{34}{56} \approx 60,7\%$$

Erwartungswerte:

$$P(\text{zwei gleichen Buchstaben}) = \frac{22}{56}$$

$$P(\text{Buchstabe C ist gezogen}) = P(A; C) + P(C; A) + P(B; C) + P(C; B)$$

$$P(A; C) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{56}, \quad P(C; A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{56}, \quad P(B; C) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{56}, \quad P(C; B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{56}$$

$$P(\text{Buchstabe C ist gezogen}) = \frac{9}{56}$$

Gewinnplan 1

	$P(\text{gleiche Buchstaben})$	$P(\text{Buchstabe C})$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	-0,50 €	-2,50 €	2,50 €
$P(X = x_i)$	$\frac{22}{56}$	$\frac{9}{56}$	$\frac{25}{56}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	-0,20 €	-0,40 €	1,17 €
$E(X)$	$-0,20 € - 0,40 € + 1,17 € = 0,57 €$		

Gewinnplan 2

	$P(\text{gleiche Buchstaben})$	$P(\text{Buchstabe C})$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	-2,50 €	-0,50 €	2,50 €
$P(X = x_i)$	$\frac{22}{56}$	$\frac{9}{56}$	$\frac{25}{56}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	-0,98 €	-0,08 €	1,17 €
$E(X)$	$-0,98 € - 0,08 € + 1,17 € = 0,11 €$		

Der Spielbetreiber sollte sich für Gewinnplan 1 entscheiden, da er hier auf lange Sicht gesehen einen größeren Gewinn pro Spiel erzielt.

Lösung A2

Lösungslogik

Aufstellen der Wahrscheinlichkeiten für die schwarzen und die roten Karten.
Gleichzeitiges Ziehen von zwei Karten entspricht Ziehen von zwei Karten hintereinander ohne Zurücklegen.

Eine rote und eine schwarze Karte hat die Ergebnisse „schwarz, rot“ oder „rot, schwarz“.

Berechnung des Erwartungswertes über eine Tabelle.

Berechnung des Erwartungswertes für geänderten Gewinnplan über eine Tabelle.

Klausuraufschrieb

$$P(\text{schwarz}) = \frac{7}{12}; \quad P(\text{rot}) = \frac{5}{12}$$

$$P(\text{eine rote und eine schwarze Karte}) = P\{(r; s), (s, r)\} = P(r, s) + P(s, r)$$

$$P(r, s) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{35}{132} \quad P(r, s) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$$

$$P(\text{eine rote und eine schwarze Karte}) = \frac{35}{132} + \frac{35}{132} = \frac{70}{132} \approx 53,03 \%$$

Erwartungswerte:

$$P(\text{zweimal Karo}) = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{6}{132}$$

$$P(\text{zweimal Herz}) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{132}$$

Gewinnplan 1

	$P(\text{zweimal Karo})$	$P(\text{zweimal Herz})$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	-9,00 €	-4,00 €	1,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{132}$	$\frac{2}{132}$	$\frac{124}{132}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	-0,41 €	-0,06 €	0,94 €
$E(X)$	-0,41 € - 0,06 € + 0,94 € = 0,47 €		

Der Spielbetreiber kann auf lange Sicht gesehen mit einer Einnahme von 0,47 € pro Spiel rechnen.

Gewinnplan 2

	$P(\text{zweimal Karo})$	$P(\text{zweimal Herz})$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	-19,00 €	-4,00 €	1,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{132}$	$\frac{2}{132}$	$\frac{124}{132}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	-0,73 €	-0,06 €	0,94 €
$E(X)$	-0,73 € - 0,06 € + 0,94 € = 0,15 €		

Der Spielbetreiber kann nach wie vor mit einer Einnahme pro Spiel rechnen, der Spielbetreiber hat nicht Recht.

Aufgabe A1

Die Seiten eines Tetraeders und eines Würfels sind wie abgebildet mit Zahlen beschriftet. Beide werden gleichzeitig geworfen. Dabei gilt bei dem Tetraeder die Zahl als geworfen, die unten liegt.



- a) Begründe, dass die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse

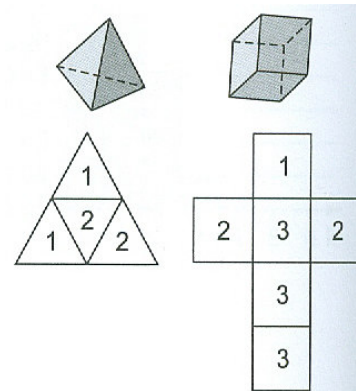
A: "Die Summe der Zahlen ist 5" und

B: "Die Summe der Zahlen ist 3"

jeweils $\frac{1}{4}$ beträgt.

- b) Bei einem Glücksspiel werden das Tetraeder und der Würfel gleichzeitig geworfen. Ein Spieler zahlt einen bestimmten Betrag als Einsatz ein. Ist die Augensumme gerade, erhält er seinen Einsatz zurück. Ist die Augensumme gleich 5, bekommt er 3 € ausgezahlt.

In allen anderen Fällen ist sein Einsatz verloren. Wie hoch sollte der Einsatz sein, damit er auf lange Sicht weder Verlust noch Gewinn macht?



Aufgabe A2

Eine Firma stellt Energiesparlampen her. Die Herstellungskosten für eine Lampe betragen 3,50 €. Sie wird für 5,20 € an den Einzelhandel verkauft.

Erfahrungsgemäß sind 8,5 % der Lampen defekt. Defekte Lampen werden vom Einzelhandel stets entdeckt. Sie werden von der Firma zurückgenommen und der Kaufpreis wird erstattet. Für jede zurückgenommene Lampe entstehen der Firma zusätzliche Kosten in Höhe von 1,20 €.

- a) Wie hoch ist der durchschnittliche Gewinn pro Lampe für die Firma?

- b) Um den Gewinn zu steigern, will die Firma vor der Auslieferung der Lampen ein Testverfahren durchführen. Dabei werden alle intakten und 90 % aller defekten Lampen als solche erkannt. Die als defekt erkannten Lampen werden dann ohne weitere Kosten entsorgt.

Wie teuer darf der Test einer Lampe sein, damit sich das Testverfahren für die Firma lohnt?

Aufgabe A3

Bei einem Glücksspiel wird ein idealer Würfel dreimal geworfen. Man erhält:

für eine Sechs 1 €,

für zwei Sechsen 5 €,

für drei Sechsen 10 €

ausgezahlt. In allen anderen Fällen wird nichts ausgezahlt.

Welchen Einsatz muss der Betreiber des Glücksspiels mindestens verlangen, damit er auf lange Sicht keinen Verlust macht?

Aufgabe A4

Bei dem abgebildeten Glücksrad erhält man bei einer Drehung die Zahl 1 mit der Wahrscheinlichkeit 0,25 und die Zahl 2 mit der Wahrscheinlichkeit p .

- a) Das Glücksrad wird dreimal gedreht.

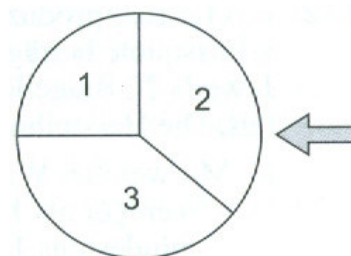
Man betrachtet das Ereignis:

A : "Es erscheinen drei verschiedene Zahlen"

Berechne die Wahrscheinlichkeit von A für

$p = 0,3$.

Für welchen Wert von p ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A am größten? Wie groß sind in diesem Fall die Mittelpunktswinkel der drei Sektoren auf dem Glücksrad?



- b) Felix und Max vereinbaren folgendes Spiel:

Felix setzt einen Euro ein. Dann dreht Max das Rad. Erscheint eine 2, so nimmt Max den Euro an sich und das Spiel ist beendet. Andernfalls legt Max zwei Euro dazu und Felix dreht das Rad. Bei einer 2 bekommt Felix den Gesamtbetrag von drei Euro. Ansonsten teilen sich beide diesen Betrag und das Spiel ist beendet. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit p für die Zahl 2 sein, damit das Spiel möglichst fair ist?

Aufgabe A5

Ein Betrieb produziert für ein großes Unternehmen elektronische Bauteile. Die Ausschussquote beträgt dabei erfahrungsgemäß 15 %.

Jeweils 20 Bauteile werden ohne Überprüfung in eine Schachtel gepackt und ausgeliefert. Die Herstellungskosten pro Schachtel betragen 55 €.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in einer Schachtel

- weniger als 16,
- mindestens 18

einwandfreie Bauteile?

- b) Dem Unternehmen werden für jede gelieferte Schachtel 120 € berechnet. Allerdings werden die Bauteile im Unternehmen überprüft. Ist in einer Schachtel höchstens ein Bauteil defekt, so zahlt das Unternehmen den vollen Preis. Bei zwei bis vier defekten Bauteilen in einer Schachtel zahlt es nur 50 % des Preises. Bei mehr als vier defekten Bauteilen wird die Schachtel nicht bezahlt.

Macht der Herstellerbetrieb bei dieser Vereinbarung noch Gewinn?

Lösung A1

Lösungslogik

- a) Es handelt sich um ein zweistufiges Zufallsexperiment mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Aufstellen des Ereignisraums und der Einzelwahrscheinlichkeiten nach den Pfadregeln.
- b) Bestimmung des Erwartungswertes $E(X) = 0$.

Klausuraufschrieb

- a) A: „Die Summe der Zahlen ist 5“

Tetraeder: $P_T(1) = \frac{1}{2}; P_T(2) = \frac{1}{2}$

Würfel: $P_W(1) = \frac{1}{6}; P_W(2) = \frac{1}{3}; P_W(3) = \frac{1}{2}$

$$A = \{(2_T; 2_W)\}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- B: „Die Summe der Zahlen ist 3“

$$B = \{(1_T; 2_W), (1_W; 2_T)\}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

- b) C: „Die Augensumme ist gerade“

$$C = \{(1_T; 1_W), (2_T; 2_W), (1_T; 3_W)\}$$

$$P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Der Einsatz sei a .

x_i	$3 - a$	0	$-a$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X) = \frac{1}{4} \cdot (3 - a) + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-a) = 0$$

$$\frac{3}{4} - \frac{a}{4} - \frac{a}{4} = 0 \Rightarrow a = 1,50$$

Bei einem Einsatz von 1,50 € macht ein Spieler bei diesem Spiel auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust.

Lösung A2

Lösungslogik

- a) Der durchschnittliche Gewinn entspricht dem Erwartungswert $E(X)$.
- b) Wie bei a) entspricht der durchschnittliche Gewinn dem Erwartungswert, wobei hier bei mit 0,9 durch das Testverfahren entdecktem Defekt ein reduzierter Verlust entsteht. Die Einführung des Testverfahrens lohnt sich für die Firma, wenn die Testkosten pro Lampe geringer sind als der Unterschied der Erwartungswerte aus b) und a).

Klausuraufschrieb

- a) Gewinn Lampe intakt: $5,20 \text{ €} - 3,50 \text{ €} = 1,70 \text{ €}$

Gewinn Lampe defekt: $5,20 \text{ €} - 5,20 \text{ €} - 3,50 \text{ €} - 1,20 \text{ €} = -4,70 \text{ €}$

$$P(X = 1,70) = 1 - 0,085 = 0,915$$

$$P(X = -4,70) = 0,085$$

$$E_a(X) = 0,915 \cdot 1,70 + 0,085 \cdot (-4,70) = 1,156$$

Der durchschnittliche Gewinn pro Lampe beträgt etwa 1,16 €.

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

- b) Gewinn Lampe intakt: 1,70 €
 Gewinn Lampe defekt Fehler erkannt: -3,50 €
 Gewinn Lampe defekt Fehler nicht erkannt: -4,70 €
 $P(X = 1,70) = 0,915$
 $P(X = -3,50) = 0,085 \cdot 0,9 = 0,0765$
 $P(X = -4,70) = 0,085 \cdot 0,1 = 0,0085$
 $E_b(X) = 0,915 \cdot 1,70 + 0,0765 \cdot (-3,50) + 0,0085 \cdot (-4,70) = 1,25$
 $E_b(X) - E_a(X) = 1,25 - 1,16 = 0,09$
 Der Test einer Lampe muss weniger als 0,09 € kosten, damit sich die Einführung des Testverfahrens lohnt.

Lösung A3

Lösungslogik

Der Erwartungswert ist zu berechnen und ein Spieleinsatz zu ermitteln, der zu $E(X) = 0$ führt.

Klausuraufschrieb

$$P(\text{eine } 6) = 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{75}{216}$$

$$P(\text{zweimal } 6) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$$

$$P(\text{dreimal } 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

$$P(\text{Niete}) = 1 - \frac{75+15+1}{216} = \frac{125}{216}$$

Der Einsatz sei a .

x_i	$10 - a$	$5 - a$	$1 - a$	$-a$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{125}{216}$

$$E(X) = \frac{10-a+15 \cdot (5-a)+75 \cdot (1-a)-125 \cdot a}{216} = 0$$

$$10 + 75 + 75 - 216a = 0$$

$$160 = 216a \Rightarrow a = 0,74$$

Der Einsatz bei dem Spiel muss mindestens 0,74 € betragen, damit der Betreiber langfristig keinen Verlust macht.

Lösung A4

Lösungslogik

- a) Berechnung der Wahrscheinlichkeit entsprechend den Pfadregeln. Ist p unbekannt, ergibt sich eine quadratische Gleichung mit einem Maximum. Die jeweiligen Mittelpunktswinkel ergeben sich aus $\alpha_n = p_n \cdot 360^\circ$.
- b) Ermittlung des Erwartungswertes mit $E(X) = 0$.
 Aufstellung der Gewinn- / Verlustmöglichkeiten von Felix.

Klausuraufschrieb

a) $P(1) = 0,25$

$$P(2) = 0,3$$

$$P(3) = 1 - 0,25 - 0,3 = 0,45$$

$$P(A) = 3! \cdot 0,25 \cdot 0,3 \cdot 0,45 = 0,2025$$

Die Wahrscheinlichkeit von A für $p = 0,3$ beträgt

20,25 %.

$$P(A(p)) = 3! \cdot 0,25 \cdot p \cdot (0,75 - p) = 1,5 \cdot p \cdot (0,75 - p)$$

GTR

$$P(A(p))_{\max} \approx 0,2109 \text{ für } p \approx 0,375$$

Für $p = 0,375$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass drei verschiedene Zahlen erscheinen am größten.

Mittelpunktswinkel:

GTR

$$\alpha_1 = p_1 \cdot 360^\circ = 90^\circ \quad \alpha_2 = 0,375 \cdot 360^\circ = 135^\circ \quad \alpha_3 = 360^\circ - \alpha_1 - \alpha_2 = 135^\circ$$

- b) X gibt den Gewinn von Felix nach Abzug seines Einsatzes an. Felix kann:
- einen Euro verlieren ($\rightarrow$ Max erhält eine 2)
 - zwei Euro gewinnen ($\rightarrow$ Felix erhält eine 2)
 - 0,50 Euro gewinnen ($\rightarrow$ der Betrag von 3 € wird geteilt)

$$x_i \in \{-1; 2; 0,5\}$$

x_i	-1	2	0,5
$P(X = x_i)$	p	$(1-p) \cdot p$	$(1-p)^2$
	1. Drehung 2	1. Drehung $\bar{2}$ 2. Drehung 2	1. Drehung $\bar{2}$ 2. Drehung $\bar{2}$

$$E(X) = -p + 2 \cdot p(1-p) + 0,5 \cdot (1-p)^2 = 0$$

$$-p + 2p - 2p^2 + 0,5 - p + 0,5p^2 = 0$$

$$-1,5p^2 + 0,5 = 0$$

$$p^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow p \approx 0,5774$$

Beträgt die Wahrscheinlichkeit für die Zahl 2 ungefähr 57,7 %, so ist das Spiel nahezu fair.

Lösung A5

Lösungslogik

- a) Die Zufallsvariable X für intakte Bauteile ist $B_{20;0,85}$ -verteilt.
 b) Die Zufallsvariable X für defekte Bauteile ist $B_{20;0,15}$ -verteilt.

Klausuraufschrieb

- a) X für einwandfreie Bauteile ist $B_{20;0,85}$ -verteilt.

Weniger als 16 einwandfreie Bauteile:

GTR

$$B_{20;0,85}(X \leq 15) \approx 0,17015 \approx 17 \%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 17 % sind weniger als 16 einwandfreie Bauteile in einer Schachtel mit 20 Stück.

Mindestens 18 einwandfreie Bauteile:

GTR

$$B_{20;0,85}(X \geq 18) = 1 - B_{20;0,85}(X \leq 17) \approx 0,404896 \approx 40,5 \%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 40,5 % sind mindestens 18 einwandfreie Bauteile in einer Schachtel mit 20 Stück.

- b) X für defekte Bauteile ist $B_{20;0,15}$ -verteilt.

Höchstens ein Bauteil defekt:

GTR

$$B_{20;0,15}(X \leq 1) \approx 0,17556 \approx 17,6 \%$$

Zwei bis vier defekte Bauteile:

GTR

$$B_{20;0,15}(2 \leq X \leq 4) = B_{20;0,15}(X \leq 4) - B_{20;0,15}(X \leq 1) \approx 0,65429 \approx 65,4 \%$$

Mehr als vier defekte Bauteile:

$$p = 100 - 17,6 - 65,4 = 17 \%$$

G beschreibt den Ertrag, den der Betrieb pro Schachtel erzielt. Der mittlere Ertrag ist der Erwartungswert $E(G)$.

g_i	120	60	0
$P(G = g_i)$	0,176	0,654	0,17

$$E(G) = 0,176 \cdot 120 + 0,654 \cdot 60 + 0,17 \cdot 0 = 60,36$$

Da der mittlere Ertrag von 60,36 € pro Schachtel größer als die Herstellkosten von 55 € ist, macht der Herstellerbetrieb auf lange Sicht Gewinn.

Aufgabe A1



Bei einer großen Produktionsserie von Speicherchips beträgt der Ausschussanteil 10 %. Chips dieser Serie werden ungeprüft in Packungen zu je 100 Stück verkauft.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in einer Packung höchstens 10 defekte Chips?
- Der Kaufpreis für einen Großabnehmer beträgt pro Packung 800 €. Mit dem Abnehmer wird vereinbart, dass eine Packung zurückgegeben und der Kaufpreis erstattet wird, wenn mehr als k defekte Chips in der Packung sind. Für eine solche Rücknahme entstehen der Herstellerfirma Kosten in Höhe von 250 €.
Welchen Wert muss k mindestens haben, damit der durchschnittliche Erlös pro Packung mindestens 700 € beträgt?

Aufgabe A2



Bei einem Glücksspiel wird ein idealer Würfel viermal geworfen und die Anzahl der Sechsen notiert.

Als Auszahlungen sind vorgesehen:

- 0 € bei höchstens einer Sechs,
- 2 € bei zwei Sechsen,
- 10 € bei drei Sechsen,
- 50 € bei vier Sechsen.

Der Einsatz pro Spiel beträgt 1 €

- Begründen Sie, dass das Spiel nicht fair ist.
- Der Auszahlungsplan soll so geändert werden, dass der Erwartungswert für den Verlust eines Spielers 20 Cent beträgt. Dazu soll auch für den Fall, dass höchstens eine Sechs notiert wird, ein Betrag ausgezahlt werden sowie das 10-fache dieses Betrages bei zwei Sechsen. Die beiden anderen Auszahlungsbeträge bleiben unverändert. Bestimme die geänderten Auszahlungsbeträge.

Aufgabe A3



Aus Umfragen weiß man, dass aller Handybesitzer ein Gerät der Marke SUN verwenden. Es werden zufällig 300 Handybesitzer ausgewählt. Die Zufallsvariable X beschreibt darunter die Anzahl der Handybesitzer, die ein Gerät der Marke SUN nutzen.

- Mit welcher Anzahl von SUN-Nutzern kann man rechnen?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit nutzen mehr als 100 Handybesitzer ein SUN-Gerät?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der SUN-Nutzer um höchstens 10 vom Erwartungswert von X ab?
Bestimme eine möglichst kleine natürliche Zahl a so, dass die Anzahl der SUN-Nutzer mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit um höchstens a vom Erwartungswert von X abweicht.

Aufgabe A4

Bei einer Lotterie werden Lose verkauft, auf denen jeweils eine von einem Computer zufällig erzeugte sechsstellige Zahl aufgedruckt ist. Jede dieser Zahlen besteht nur aus den Ziffern 0 und 1, die mit Wahrscheinlichkeiten 0,75 bzw. 0,25 erzeugt werden. Jedes Los, bei dem die aufgedruckte Zahl mehr als dreimal die Ziffer 1 enthält, ist ein Gewinnlos.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein Gewinnlos zu erhalten?
- Für Gewinnlose gilt der folgende Auszahlungsplan:

Anzahl der Ziffern 1 auf dem Gewinnlos	4	5	6
Auszahlung in €	5	50	500

Die Lotteriegesellschaft will pro Los durchschnittlich mindestens 0,50 € verdienen. Wie muss dazu der Preis für ein Los kalkuliert werden?

Aufgabe A5

In einer Bevölkerung ist eine Viruserkrankung ausgebrochen. Der Anteil der infizierten Personen, bei denen die Krankheit aber noch nicht ausgebrochen ist, ist p . Mit einem neu entwickelten Bluttest kann man das Virus sicher nachweisen. Er soll bei einer Reihenuntersuchung eingesetzt werden, um die Krankheit bereits vor Ausbruch zu diagnostizieren. Um die Zahl der teuren Tests möglichst klein zu halten, wird dabei Blut von 20 Personen gemischt und untersucht. Nur wenn sich dabei das Virus nachweisen lässt, wird das Blut jeder der 20 Personen noch einmal einzeln untersucht.

- Man geht zunächst von $p = 0,05$ aus. Mit wie vielen Tests muss man durchschnittlich bei Gruppen von 20 Personen rechnen?
- Für welchen Wert von p sind bei diesem Verfahren durchschnittlich 10 Tests pro Gruppe von 20 Personen zu erwarten?

Aufgabe A6

Eine Firma produziert elektrische Rasierapparate. Erfahrungsgemäß sind 6 % der produzierten Apparate defekt. Um die defekten Rasierapparate vor dem Verkauf auszusondern, werden alle Geräte überprüft. Bei dieser Überprüfung kommt es bei den defekten Geräten mit der Wahrscheinlichkeit 0,09 und bei den intakten Geräten mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,01 zu einer Fehlentscheidung. Alle bei der Überprüfung als intakt deklarierten Geräte werden zum Verkauf freigegeben.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es bei der Kontrolle eines Rasierapparats zu einer Fehlentscheidung kommt?
- Bei wie vielen von 10000 produzierten Rasierapparaten kann man mit einer Verkaufsfreigabe rechnen?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der tatsächlich freigegebenen Apparate um höchstens 25 davon ab?

Lösung A1

Lösungslogik

- a) Die Zufallsvariable X für defekte Speicherchips ist $B_{100;0,1}$ -verteilt.
 b) Die Zufallsvariable X für defekte Speicherchips ist $B_{100;0,1}$ -verteilt.

Klausuraufschrieb GTR

- a) X für defekte Speicherchips ist $B_{100;0,1}$ -verteilt.
 Höchstens 10 defekte Chips pro Packung:

GTR

$$B_{100;0,1}(X \leq 10) \approx 0,5832 \approx 58,3 \%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 58,3 % sind höchstens 10 defekte Speicherchips in einer Packung mit 100 Stück.

- b) X für defekte Speicherchips ist $B_{100;0,1}$ -verteilt.

Sei G der Erlös pro Packung. Der mittlere Erlös ist der Erwartungswert $E(G)$.

$$P(G = -250) = B_{100;0,1}(X > k) \quad (\text{Packung wird zurückgegeben})$$

$$P(G = 800) = B_{100;0,1}(X \leq k) \quad (\text{Packung wird akzeptiert})$$

$$E(G) = -250 \cdot B_{100;0,1}(X > k) + 800 \cdot B_{100;0,1}(X \leq k)$$

$$= -250 \cdot (1 - P(X \leq k)) + 800 \cdot P(X \leq k)$$

$$= -250 + 1050 \cdot P(X \leq k)$$

$$E(G) \geq 700 \quad (\text{laut Aufgabenstellung})$$

$$-250 + 1050 \cdot B_{100;0,1}(X \leq k) \geq 700$$

$$1050 \cdot B_{100;0,1}(X \leq k) \geq 950$$

GTR

$$B_{100;0,1}(X \leq k) \geq 0,9048 \Rightarrow k = 14$$

Eine Rückgabe sollte erst bei mehr als 14 defekten Chips erfolgen, damit der durchschnittliche Erlös pro Packung mindestens 700 € beträgt.

Klausuraufschrieb WTR

- a) X für defekte Speicherchips ist $B_{100;0,1}$ -verteilt.
 Höchstens 10 defekte Chips pro Packung:

GTR

$$B_{100;0,1}(X \leq 10) \approx 0,5832 \approx 58,3 \%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 58,3 % sind höchstens 10 defekte Speicherchips in einer Packung mit 100 Stück.

- b) X für defekte Speicherchips ist $B_{100;0,1}$ -verteilt.

Sei G der Erlös pro Packung. Der mittlere Erlös ist der Erwartungswert $E(G)$.

$$P(G = -250) = B_{100;0,1}(X > k) \quad (\text{Packung wird zurückgegeben})$$

$$P(G = 800) = B_{100;0,1}(X \leq k) \quad (\text{Packung wird akzeptiert})$$

$$E(G) = -250 \cdot B_{100;0,1}(X > k) + 800 \cdot B_{100;0,1}(X \leq k)$$

$$= -250 \cdot (1 - P(X \leq k)) + 800 \cdot P(X \leq k)$$

$$= -250 + 1050 \cdot P(X \leq k)$$

$$E(G) \geq 700 \quad (\text{laut Aufgabenstellung})$$

$$-250 + 1050 \cdot B_{100;0,1}(X \leq k) \geq 700$$

$$1050 \cdot B_{100;0,1}(X \leq k) \geq 950$$

$$B_{100;0,1}(X \leq k) \geq 0,9048$$

Erwartungswert μ :

$$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,1 = 10$$

Standardabweichung σ :

$$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = \sqrt{10 \cdot 0,9} = 3$$

Die Wahrscheinlichkeit $\geq 0,9048$ liegt etwa im rechtsseitigen $1,2\sigma$ -Bereich.

$$\mu + 1,2\sigma = 10 + 3 = 13$$

Wir beginnen die Suche der Wahrscheinlichkeit mit $B_{100;0,01}(X \leq 13)$

$$B_{100;0,01}(X \leq 13) \stackrel{\text{WTR}}{\approx} 0,8761$$

$$B_{100;0,01}(X \leq 14) \stackrel{\text{WTR}}{\approx} 0,9274$$

$$k = 14$$

Eine Rückgabe sollte erst bei mehr als 14 defekten Chips erfolgen, damit der durchschnittliche Erlös pro Packung mindestens 700 € beträgt.

Lösung A2

Lösungslogik

Die Zufallsvariable gibt die Anzahl der geworfenen Sechsen an. Da die Wahrscheinlichkeitssumme der Einzelereignisse gleich 1 ist, bleibt die Angabe über den Einsatz pro Spiel unberücksichtigt.

- Aufstellen der Tabelle und Berechnung von $E(X)$.
- Anpassung der Tabelle aus a) an den neuen Gewinnplan. Dabei wird der Auszahlungsbetrag für höchstens eine Sechs auf eine Variable gesetzt und der der Auszahlungsbetrag für zwei Sechsen auf das Zehnfache dieser Variablen.

Klausuraufschrieb

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1125}{1296}$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6 \cdot \frac{25}{1296} = \frac{150}{1296}$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = 4 \cdot \frac{5}{1296} = \frac{20}{1296}$$

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296}$$

a)

x_i	0 €	2 €	10 €	50 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1125}{1296}$	$\frac{150}{1296}$	$\frac{20}{1296}$	$\frac{1}{1296}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0 €	0,2315 €	0,1543 €	0,0386 €

$$E(X) = 0 + 0,2315 + 0,01543 + 0,0386 = 0,4244$$

Da der Erwartungswert kleiner ist als der Einsatz von 1 €, ist das Spiel nicht fair.

b) *Neue Auszahlungsbeträge*

x_i	a €	10a €	10 €	50 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1125}{1296}$	$\frac{150}{1296}$	$\frac{20}{1296}$	$\frac{1}{1296}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0 €	0,2315 €	0,1543 €	0,0386 €

$$E(X) = 0,0881a + 1,1574a + 0,01543 + 0,0386 = 0,20$$

$$1,2455a = 0,14597 \Rightarrow a = 0,1172$$

Der neue Auszahlungsbetrag für höchstens eine Sechs beträgt 0,12 € und der für zwei Sechsen beträgt damit 1,20 €.

Lösung A3

Lösungslogik

Die Erwartungswert in der Binomialverteilung errechnet sich aus $\mu = n \cdot p$.

- b) Gesucht ist im ersten Teil die Wahrscheinlichkeit $P(\mu - 10 \leq X \leq \mu + 10)$.

Im zweiten Teil der Aufgabe ist ein a gesucht, für das gilt:

$$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) \geq 0,95.$$

Klausuraufschrieb GTR

- a) $E(X) = \mu = n \cdot p = 300 \cdot 0,3 = 90$

Man kann mit 90 Handynutzern der Mare SUN rechnen.

$$B_{300;0,3}(X \geq 100) = 1 - B_{300;0,3}(X \leq 99) \stackrel{\text{GTR}}{\approx} 0,1163$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 100 Handybesitzer ein SUN-Gerät nutzen beträgt etwa 11,6 %.

- b) $B_{300;0,3}(80 \leq X \leq 100) = B_{300;0,3}(X \leq 100) - B_{300;0,3}(X \leq 79) \stackrel{\text{GTR}}{\approx} 0,0029$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,3 % weicht die Anzahl der SUN-Nutzer um höchstens 10 vom Erwartungswert ab.

Teil 2 GTR-Einstellungen:

Y1: $\text{binomcdf}(300, .3, 90 + X) - \text{binomcdf}(300, .3, 89 - X)$

$$\begin{aligned} B_{300;0,3}(90 - a \leq X \leq 90 + a) \\ = B_{300;0,3}(X \leq 90 + a) - B_{300;0,3}(X \leq 89 - a) \\ \geq 0,95 \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{GTR}}{a = 16}$$

Die kleinste natürliche Zahl lautet $a = 16$.

2ND		TABLE F5	
		GRAPH	
X	Y1	Y2	
13	.9113	.95	
14	.93254	.95	
15	.94942	.95	
16	.9626	.95	
17	.97274	.95	
18	.98041	.95	
19	.98612	.95	

X=16

Klausuraufschrieb WTR

- a) $E(X) = \mu = n \cdot p = 300 \cdot 0,3 = 90$

Man kann mit 90 Handynutzern der Mare SUN rechnen.

$$B_{300;0,3}(X \geq 100) = 1 - B_{300;0,3}(X \leq 99) \stackrel{\text{GTR}}{\approx} 0,1163$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 100 Handybesitzer ein SUN-Gerät nutzen beträgt etwa 11,6 %.

- b) $B_{300;0,3}(80 \leq X \leq 100) = B_{300;0,3}(X \leq 100) - B_{300;0,3}(X \leq 79) \stackrel{\text{GTR}}{\approx} 0,0029$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,3 % weicht die Anzahl der SUN-Nutzer um höchstens 10 vom Erwartungswert ab.

Für a soll gelten

$$B_{300;0,3}(90 - a \leq X \leq 90 + a) \geq 0,95$$

Dies ist etwa der $1,8\sigma$ -Bereich

Erwartungswert μ :

$$\mu = n \cdot p = 300 \cdot 0,3 = 90$$

Standardabweichung σ :

$$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = \sqrt{90 \cdot 0,7} \approx 8$$

$$1,8\sigma = 1,8 \cdot 8 = 14$$

Wir beginnen mit $a = 14$:

$$B_{300;0,3}(90 - 14 \leq X \leq 90 + 14) = B_{300;0,3}(X \leq 104) - B_{300;0,3}(X \leq 75)$$

$$\stackrel{\text{WTR}}{B_{300;0,3}(X \leq 104)} \approx 0,9647 \quad \stackrel{\text{WTR}}{B_{300;0,3}(X \leq 75)} \approx 0,0322$$

$$B_{300;0,3}(X \leq 104) - B_{300;0,3}(X \leq 75) = 0,9647 - 0,0322 = 0,9325$$

Wegen $0,9325 < 0,95$ erhöhen wir a auf $a = 15$:

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

$$B_{300;0,3}(90 - 15 \leq X \leq 90 + 15) = B_{300;0,3}(X \leq 105) - B_{300;0,3}(X \leq 74)$$

$$\overset{\text{WTR}}{B_{300;0,3}(X \leq 105)} \approx 0,9733 \quad \overset{\text{WTR}}{B_{300;0,3}(X \leq 74)} \approx 0,0239$$

$$B_{300;0,3}(X \leq 105) - B_{300;0,3}(X \leq 74) = 0,9733 - 0,0239 = 0,9494$$

Wegen $0,9494 < 0,95$ erhöhen wir a auf $a = 16$:

$$B_{300;0,3}(90 - 16 \leq X \leq 90 + 16) = B_{300;0,3}(X \leq 106) - B_{300;0,3}(X \leq 73)$$

$$\overset{\text{WTR}}{B_{300;0,3}(X \leq 106)} \approx 0,9800 \quad \overset{\text{WTR}}{B_{300;0,3}(X \leq 73)} \approx 0,0174$$

$$B_{300;0,3}(X \leq 106) - B_{300;0,3}(X \leq 73) = 0,9800 - 0,0174 = 0,9626$$

Wegen $0,9626 > 0,95$ ist $a = 16$ der gesuchte Wert.

Die kleinste natürliche Zahl lautet $a = 16$.

Lösung A4

Lösungslogik

- Die Zufallsvariable X für die Anzahl von 1-en ist $B_{6;0,25}$ -verteilt.
- Der Erwartungswert $E(X)$ ist zu bilden und dem Einsatz a gegenüber zu stellen, wobei $a - E(X) = 0,5$ sein muss.

Klausuraufschrieb

- X für die Anzahl der 1-en ist $B_{6;0,25}$ -verteilt.

$$\overset{\text{GTR}}{P(X \geq 4)} = 1 - P(X \leq 3) \approx 0,0376 \approx 3,8\%$$

Die Wahrscheinlichkeit ein Gewinnlos zu erhalten beträgt ca. 3,8%.

- Gewinnwahrscheinlichkeiten:

$$\overset{\text{GTR}}{P(X = 4)} \approx 0,03296$$

$$\overset{\text{GTR}}{P(X = 5)} \approx 0,00439$$

$$\overset{\text{GTR}}{P(X = 6)} \approx 0,00024$$

$$E(X) = 5 \cdot 0,03296 + 50 \cdot 0,00439 + 500 \cdot 0,00024 \approx 0,50$$

Der Einsatz sei a . Dann gilt:

$$a - E(X) = 0,5 \Rightarrow a = 1,00$$

Langfristig muss die Lotteriegesellschaft pro Los durchschnittlich 0,50 € auszahlen. Um mindestens 0,50 € pro Los zu verdienen, sollte der Preis daher mindestens 1,00 € betragen.

Lösung A05

Lösungslogik

- Die Zufallsvariable X für die Anzahl infizierter Personen ist $B_{20;0,05}$ -verteilt. Ist $X = 0$ (kein Blut eines infizierten im Gemisch) ist kein weiterer Test erforderlich. Ist $X \geq 1$ müssen alle 20 Proben einzeln untersucht werden, hinzu kommt noch der bereits durchgeführte Gruppentest. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl durchzuführender Versuche an. Der Durchschnitt entspricht dem Erwartungswert:
 $E(X) = 1 \cdot P(X = 0) + 21 \cdot P(X \geq 1)$
- Die Zufallsvariable Z gibt die Anzahl der Versuche an. Die Zufallsvariable Z für die Anzahl infizierter Personen ist $B_{20;p}$ -verteilt. Gesucht ist p für $E(Z) = 10$.

Klausuraufschrieb GTR

GTR-Einstellungen

$$\mathbf{Y1}: 21 - 20 \cdot \text{binompdf}(20, X, 0)$$

$$\mathbf{Y2}: 10$$

- a) X für die Anzahl infizierter Personen ist $B_{20;0,05}$ -verteilt.

Globaler Test:

GTR

$$B_{20;0,05}(X = 0) \approx 0,3585$$

Weitere Tests für $X \neq 0$

$$B_{20;0,05}(X \geq 1) = 1 - B_{20;0,05}(X = 0) = 0,6415$$

Sei Z die Anzahl durchzuführender Tests, dann gilt:

$$E(Z) = 1 \cdot B_{20;0,05}(X = 0) + 21 \cdot B_{20;0,05}(X \geq 1) = 1 \cdot 0,3585 + 2$$

Man muss durchschnittlich mit etwa 14 Tests pro Gruppe rechnen.

- b) Gesucht: p für $E(Z) = 10$ mit $Z \sim B_{20;p}$ -verteilt.

$$B_{20;p}(Z = 1) = B_{20;p}(Z = 0)$$

$$B_{20;p}(Z = 21) = B_{20;p}(Z \geq 1) = 1 - B_{20;p}(Z = 0)$$

$$E(Z) = B_{20;p}(Z = 0) + 21 - 21 \cdot B_{20;p}(Z = 0)$$

$$E(Z) = 21 - 20 \cdot B_{20;p}(Z = 0) = 10$$

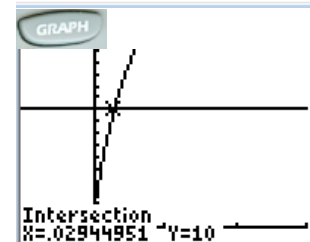
GTR

$$p \approx 0,02945 \approx 2,9\% \text{ für } E(Z) = 10$$

Wenn der Anteil der infizierten, aber noch nicht erkrankten Personen etwa 2,9 % beträgt, sind durchschnittlich 10 Tests pro Gruppe zu erwarten.

GTR-Lösung zu b)

```
WINDOW
Xmin=-.1
Xmax=.3
Xscl=.1
Ymin=-1
Ymax=15
Yscl=1
↓Xres=1
```



Klausuraufschrieb WTR

- a) X für die Anzahl infizierter Personen ist $B_{20;0,05}$ -verteilt.

Globaler Test:

WTR

$$B_{20;0,05}(X = 0) \approx 0,3585$$

Weitere Tests für $X \neq 0$

$$B_{20;0,05}(X \geq 1) = 1 - B_{20;0,05}(X = 0) = 0,6415$$

Sei Z die Anzahl durchzuführender Tests, dann gilt:

$$E(Z) = 1 \cdot B_{20;0,05}(X = 0) + 21 \cdot B_{20;0,05}(X \geq 1) = 1 \cdot 0,3585 + 21 \cdot 0,6415 = 13,83$$

Man muss durchschnittlich mit etwa 14 Tests pro Gruppe rechnen.

- b) Gesucht: p für $E(Z) = 10$ mit $Z \sim B_{20;p}$ -verteilt.

$$B_{20;p}(Z = 1) = B_{20;p}(Z = 0)$$

$$B_{20;p}(Z = 21) = B_{20;p}(Z \geq 1) = 1 - B_{20;p}(Z = 0)$$

$$E(Z) = B_{20;p}(Z = 0) + 21 - 21 \cdot B_{20;p}(Z = 0)$$

$$E(Z) = 21 - 20 \cdot B_{20;p}(Z = 0) = 10$$

$$-20 \cdot B_{20;p}(Z = 0) = -11 \quad | \quad :(-20)$$

$$B_{20;p}(Z = 0) = \frac{11}{20} = 0,55$$

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

Da der WTR keinerlei Möglichkeit bietet, den Prozentsatz p variabel anzugeben, ist hier nur noch ausprobieren möglich.

Die folgende Tabelle zeigt für verschiedene „ausprobierte“ p die Wahrscheinlichkeiten $B_{20;p}(Z = 0)$.

p	$B_{20;p}(Z = 0)$	Kommentar
0,4	0,00004	Wert $< 0,55$
0,8	0,00000	Wert $< 0,55$, der gesuchte Wert liegt also bei $p < 0,.$
0,2	0,0115	Wert $< 0,55$
0,1	0,1216	Wert $< 0,55$
0,05	0,3584	Wert $< 0,55$
0,02	0,6676	Wert $> 0,55$, der gesuchte Wert liegt somit $0,02 < p < 0,05$
0,03	0,5437	Wert $< 0,55$, aber nahe an 0,55. Ab hier Schritte mit $< 0,001$
0,029	0,5551	Wert $> 0,55$ Wir erklären $p = 0,029$ als gsuchten Wert.

WTR
 $p = 0,029$, denn $B_{20;0,029}(Z = 0) = 0,5551$

Wenn der Anteil der infizierten, aber noch nicht erkrankten Personen etwa 2,9 % beträgt, sind durchschnittlich 10 Tests pro Gruppe zu erwarten.

Lösung A6

Lösungslogik

- a) Eine Fehlentscheidung liegt dann vor, wenn ein intakter Rasierapparat nicht zum Verkauf freigegeben wird, bzw. ein defekter Rasierapparat zum Verkauf freigegeben wird. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit entsprechend den Pfadregeln.
- b) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der zum Verkauf freigegebenen Geräte an und ist $B_{10000;0,936}$ –verteilt. Gesucht ist $E(X)$.
Die Anzahl der tatsächlich freigegebenen Geräte weicht um höchstens 25 von $E(X)$ ab, wenn sie mindestens $E(X) - 25$ und höchstens $E(X) + 25$ beträgt.

Klausuraufschrieb

- a) Bestimmung der Elementarereignisse:

R : "Rasierapparat intakt"

$\bar{R}$: "Rasierapparat defekt"

V : "Zum Verkauf freigegeben"

$\bar{V}$: "Nicht zum Verkauf freigegeben"

Vierfeldertafel:

	R	$\bar{R}$	
V	$0,94 \cdot 0,99$	$0,06 \cdot 0,09$	0,936
$\bar{V}$	$0,94 \cdot 0,01$	$0,06 \cdot 0,91$	0,064
	0,94	0,06	1

$$P(R\bar{V} \cup \bar{R}V) = 0,94 \cdot 0,01 + 0,06 \cdot 0,09 = 0,0148$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 1,5 % kommt es bei der Überprüfung eines Rasierapparates zu einer Fehlentscheidung.

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

- b) Das Gegenereignis von a) ist die Wahrscheinlichkeit für die Freigabe eines Rasierapparates, also $p = 1 - 0,0148 = 0,936$.

$$E(X) = 10000 \cdot 0,936 = 9360$$

Man kann mit einer Freigabe von 9360 von 10000 Rasierapparaten rechnen.

Wahrscheinlichkeit der Abweichung:

$$\text{Intervall der Abweichung ist } [E(X) - 25; E(X) + 25] = [9335; 9385]$$

X ist $B_{10000;0,936}$ -verteilt.

$$B_{10000;0,936}(9335 \leq X \leq 9385) = B_{10000;0,936}(X \leq 9385) - B_{10000;0,936}(X \leq 9334) \stackrel{\text{GTR}}{\approx} 0,7026 \approx 70,3 \%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 70,3 % weicht die Anzahl der zum Verkauf freigegebenen Rasierapparate um höchstens 25 von 9360 ab.