Inhaltsverzeichnis Stochastik

	Seite
WIKI zur Stochastik	03
01 *WIKI zu den Urnenmodellen*	04
Grundlagen	
Aufgabenblatt 1	05
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	07
Aufgabenblatt 2	11
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	13
Aufgabenblatt 3	17
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	19
Fortgeschritten	
Aufgabenblatt 1	23
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	24
02 *WIKI zur Binomialverteilung*	27
Grundlagen	
Aufgabenblatt 1	28
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	31
Aufgabenblatt 2	34
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	36
Aufgabenblatt 3	39
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	42
Fortgeschritten	
Aufgabenblatt 1	47
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	49
Aufgabenblatt 2	52
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	54
Aufgabenblatt 3	59
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	61
Expert	
Aufgabenblatt 1	65
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	68

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

03 *WIKI zum Erwartungswert* 73
Grundlagen
Aufgabenblatt 1 74
Lösungen zum Aufgabenblatt 1 76
Aufgabenblatt 2 80
Lösungen zum Aufgabenblatt 2 85
Aufgabenblatt 3 87
Lösungen zum Aufgabenblatt 3 90
Fortgeschritten
Aufgabenblatt 1 96
Lösungen zum Aufgabenblatt 1 100

04 *WIKI zum Signifikanztest* 108
Grundlagen
Aufgabenblatt 1 109
Lösungen zum Aufgabenblatt 1 108
Fortgeschritten
Aufgabenblatt 1 113
Lösungen zum Aufgabenblatt 1 115
Aufgabenblatt 2 119
Lösungen zum Aufgabenblatt 2 120
Expert
Aufgabenblatt 1 122
Lösungen zum Aufgabenblatt 1 123

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Dieses Dokument ist noch im Aufbau

Dieses Dokument ist noch im Aufbau

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Ein Glücksrad hat drei Sektoren mit den Farben Rot, Gelb und Grün. Das Rad bleibt mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}1$ so stehen, dass der Zeiger in den roten Sektor zeigt, und mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}3$ so, dass der Zeiger in den gelben Sektor zeigt.

a) Bestimme die Mittelpunktwinkel der drei Sektoren.
b) Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit beim dreimaligen Drehen die Farbfolge rot-gelb-grün auftritt.
c) Berechne auch, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei zweimaligem Drehen dieselbe Farbe auftritt.

Aufgabe A2

In einem Karton sind zwei Dosen mit je 20 Keksen. Dose I enthält 12 Kekse mit Schokolade, Dose II nur vier. Es wird zufällig eine Dose ausgewählt und ein Keks herausgenommen.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: "Der gewählte Keks ist ein Schokoladenkeks".
b) Beweise, dass $P(A)$ gleich bleibt, wenn die vorhandenen Kekse anders auf die beiden Dosen verteilt werden, wobei aber jede Dose nach wie vor insgesamt 20 Kekse enthält.

Aufgabe A3

In einer Urne befinden sich drei weiße und fünf schwarze Kugeln. Es werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

a) Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass mindestens eine der gezogenen Kugeln weiß ist.
b) Ermittle, wie viele weiße Kugeln zusätzlich in die Urne getan werden müssen, damit die in Aufgabenteil a) berechnete Wahrscheinlichkeit auf den Wert $\frac{8}{9}$ ansteigt.

Aufgabe A4

In einer Lostrommel sind vier Nieten und zwei Gewinnlose. Ein Kunde kauft so lange Lose, bis er alle Gewinnlose besitzt. Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass er höchstens vier Käufe tätigen muss.

Aufgabe A5

In einem Behälter befinden sich zwei rote und vier schwarze Kugeln.

a) Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben beide Kugeln die gleiche Farbe?
b) Es werden nun nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der beiden Kugeln rot ist.

Aufgabe A6

Mit einem idealen Würfel wird zweimal gewürfelt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine 6 fällt?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augenzahl beim zweiten Wurf größer als beim ersten?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A7

In einer Urne liegen zwei rote und drei blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln wie folgt gezogen:

Ist die erste Kugel rot, wird sie in die Urne zurückgelegt.
Ist die erste Kugel blau, so wird sie nicht zurückgelegt.

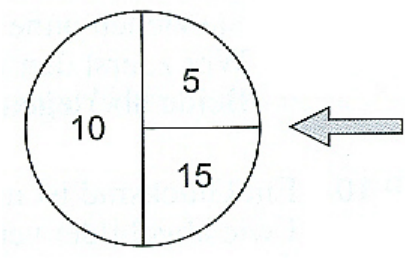
Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

a) A: "Die zweite Kugel ist rot."
b) B: "Die zweite Kugel ist blau."
c) C: "Die zwei Kugeln haben verschiedene Farben."

Aufgabe A8

Das nebenstehende Glücksrad wird dreimal gedreht.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

A: "Es erscheint immer die Zahl 10."
B: "Genau zweimal erscheint eine ungerade Zahl."
C: "Die Summe der Zahlen ist höchstens 20."



Aufgabe A9

Ein Tennismatch besteht aus maximal drei Sätzen. Das Match gewinnt der Spieler, der zuerst zwei Sätze für sich entscheidet. Erfahrungsgemäß gewinnt Felix gegen Max zwei von drei Sätzen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit dauert das Match nur zwei Sätze?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann Max das Match für sich entscheiden?

Aufgabe A10

In einer Schachtel liegen sechs gleiche Zettel, auf denen je ein Wort es Satzes „*In der Kürze liegt die Würze*" steht.

a) Aus der Schachtel wird zufällig ein Zettel gezogen.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Buchstaben des gezogenen Wortes an. Welche Werte kann X annehmen?
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

b) Es werden nun so lange Zettel ohne Zurücklegen aus der Schachtel gezogen, bis man ein Wort mit fünf Buchstaben erhält. Die Zufallsvariable Y gibt die Anzahl der Ziehungen an.
Welche Werte kann Y annehmen? Berechne $P(Y \leq 2)$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Lösungslogik

Die Wahrscheinlichkeiten sind $p_{rot} = 0{,}1$, $p_{gelb} = 0{,}3$ und $p_{grün} = 0{,}6$. Die jeweiligen Mittelpunktwinkel errechnen sich aus $360\,° \cdot p$.

Klausuraufschrieb

a) $\alpha_{rot} = p_{rot} \cdot 360\,° = 36\,°$
$\beta_{gelb} = p_{gelb} \cdot 360\,° = 108\,°$
$\gamma_{grün} = p_{grün} \cdot 360\,° = 216\,°$

b) $P(rot; gelb; grün) = p_{rot} \cdot p_{gelb} \cdot p_{grün} = 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}018$

c) $P(zweimal\ dieselbe\ Farbe) = P(rot; rot) + P(gelb; gelb) + P(grün; grün)$
$P(zweimal\ dieselbe\ Farbe) = 0,1^2 + 0,3^2 + 0,6^2 = 0{,}46$

Lösung A2

Lösungslogik

a) Es erfolgt zunächst die Wahl der Keksdosen mit $p_{Dose} = 0{,}5$ und danach die Auswahl eines Schokoladenkekses mit $p_I = \frac{12}{20}$ und $p_{II} = \frac{4}{20}$.

b) Wir haben insgesamt 40 Kekse, wovon 16 Schokoladenkekse sind. Wir bezeichnen die Anzahl Schokoladenkekse in Dose I mit x und die Anzahl in Dose II mit $16 - x$.

Klausuraufschrieb

a) $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{20} + \frac{12}{20}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

b) Anzahl Schokoladenkekse in Dose I sei x.
Anzahl Schokoladenkekse in Dose II ist dann $16 - x$.
$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{20} + \frac{16-x}{20}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+16-x}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4$
Die berechnete Wahrscheinlichkeit ist unabhängig von der unterschiedlichen Verteilung der 16 Schokoladenkekse.

Lösung A3

Lösungslogik

Die Wahrscheinlichkeiten sind $p_{weiß} = \frac{3}{8}$, $p_{schwarz} = \frac{5}{8}$. „Mindestens eine der gezogenen Kugeln ist weiß" ist das Gegenereignis von „keine Kugel ist weiß". Für Teilaufgabe b) ist mir der Zahl x weiße Kugeln zu rechnen.

Klausuraufschrieb

a) A: „Mindestens eine Kugel ist weiß"
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 1 - \frac{25}{64} = \frac{39}{64}$

b) $P(A) = \frac{8}{9} = 1 - \left(\frac{5}{5+x}\right)^2$
$\left(\frac{5}{5+x}\right)^2 = \frac{1}{9}$
$\frac{5}{5+x} = \frac{1}{3}$
$15 = 5 + x \quad \Rightarrow \quad x = 10$
Es müssen 7 weiße Kugeln zusätzlich in die Urne getan werden.

Lösung A4

Lösungslogik

Die Ereignisse seien: G: „Kunde zieht Gewinn",
N: „Kunde zieht Niete".

Es ist der Ereignisraum aufzustellen und die jeweiligen Ereignisse gemäß erster und zweiter Pfadregel zu multiplizieren bzw. zu addieren.
Es handelt sich um Ziehen „**ohne**" Zurücklegen.

Klausuraufschrieb

G: „Kunde zieht Gewinn" N: „Kunde zieht Niete"

$P(2\ Gewinne\ bei\ höchstens\ vier\ Käufen) =$

$$P(GG) + P(GNG) + P(GNNG) + P(NGG) + P(NGNG) + P(NNGG) =$$

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{15}\cdot 6 = 0{,}4$$

Die Wahrscheinlichkeit mit höchstens vier Käufen alle Gewinnlose zu ziehen beträgt $40\ \%$.

Lösung A5

Lösungslogik

a) Ziehen mit Zurücklegen mit $p_{rot} = \frac{2}{6}$ und $p_{schwarz} = \frac{4}{6}$.

b) Ziehen ohne Zurücklegen. Mindestens eine Kugel ist rot ist das Gegenereignis zu keine Kugel ist rot.

Klausuraufschrieb

a) A: „Beide Kugeln haben die gleiche Farbe."
$P(A) = \{(rot; rot), (schwarz; schwarz)\}$
$P(A) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

b) A: „Mindestens eine Kugel ist rot."
$\overline{A}$: „Keine Kugel ist rot."
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5} = 1 - \frac{12}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

Lösung A6

Lösungslogik

a) Ziehen mit Zurücklegen mit $p_6 = \frac{1}{6}$ und $p_{\overline{6}} = \frac{5}{6}$. Mindestens eine 6 ist das Gegenereignis zu keine 6.

b) Wir stellen den Ereignisraum für „Augenzahl beim zweiten Wurf ist größer" auf. Die Anzahl multipliziert mit $\frac{1}{36}$ ist dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Klausuraufschrieb

a) A: „Mindestens eine 6" $\overline{A}$: „Keine 6"
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

b) B: „Die Augenzahl beim zweiten Wurf ist größer als beim ersten."
Ereignisraum:
$(1{,}2); (1{,}3); (1{,}4); (1{,}5); (1{,}6)$
$(2{,}3); (2{,}4); (2{,}5); (2{,}6)$
$(3{,}4); (3{,}5); (3{,}6)$
$(4{,}5); (4{,}6); (5{,}6)$
Der Ereignisraum von B umfasst insgesamt 15 Einzelereignisse, somit:
$P(B) = 15 \cdot \frac{1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A7

Lösungslogik

Wir müssen beachten, dass es sich um Ziehen mit Zurücklegen handelt, wenn als erstes die rote Kugel gezogen wird und um Ziehen ohne Zurücklegen, wen im ersten Zug die blaue Kugel gezogen wird. Das verändert die Wahrscheinlichkeit der Einzelziehung.

$p_{1rot} = \frac{2}{5}$, und $p_{1blau} = \frac{3}{5}$, jedoch $p_{2rot}(p_{1rot}) = \frac{2}{5}$,. $p_{2rot}(p_{1blau}) = \frac{2}{4}$, $p_{2blau}(p_{1rot}) = \frac{3}{5}$, $p_{2blau}(p_{1blau}) = \frac{2}{4}$.

Klausuraufschrieb

A: „Die zweite Kugel ist rot."

Ereignisraum: (rot, rot); $(blau, rot)$

$P(A) = P(rot; rot) + P(blau; rot) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{25} + \frac{6}{20} = \frac{46}{100} = \frac{23}{50}$

B: „Die zweite Kugel ist blau."

Ereignisraum: $(rot, blau)$; $(blau, blau)$

$P(B) = P(rot; blau) + P(blau; blau) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{25} + \frac{6}{20} = \frac{54}{100} = \frac{27}{50}$

C: „Die zwei Kugeln haben verschiedene Farben."

Ereignisraum: $(rot, blau)$; $(blau, rot)$

$P(C) = P(rot; blau) + P(blau; rot) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{25} + \frac{6}{20} = \frac{54}{100} = \frac{27}{25}$

Lösung A8

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.

$p_{10} = \frac{1}{2}$, $p_{15} = \frac{1}{4}$, $p_5 = \frac{1}{4}$ und $p_{ungerade} = p_{15} + p_5 = \frac{1}{2}$.

Klausuraufschrieb

A: „Es erscheint immer die Zahl 10."

Ereignisraum: $(10; 10; 10)$

$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

B: „Genau zweimal erschein eine ungerade Zahl."

Ereignisraum: $(p_{10}, p_{ung}, p_{ung})$; $(p_{ung}, p_{10}, p_{ung})$; $(p_{ung}, p_{ung}, p_{10})$

$P(B) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

C: „Die Summe der Zahlen ist höchstens 20"

Ereignisraum: $(5; 5; 5)$; $(5,5,10)$; $(5,10,5)$; $(10,5,5)$

$P(C) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64} + \frac{3}{32} = \frac{7}{64}$

Lösung A9

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen. $p_{Felix} = \frac{2}{3}$, $p_{Max} = \frac{1}{3}$.

Klausuraufschrieb

a) A: „Das Match dauert nur 2 Sätze."
Ereignisraum: $(p_{Felix}; p_{Felix}); (p_{Max}; p_{Max})$
$P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

b) B: „Max gewinnt."
Ereignisraum: $(p_{Max}, p_{Max}); (p_{Felix}, p_{Max}, p_{Max}); (P_{Max}, p_{Felix}, p_{Max})$
$P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9} + \frac{4}{27} = \frac{7}{27}$

Lösung A10

Klausuraufschrieb

a) „In der Kürze liegt die Würze" hat 6 Worte. Ein Wort mit zwei Buchstaben, zwei Worte mit drei Buchstaben und 3 Worte mit fünf Buchstaben. Die Zufallsvariable X kann somit die Werte $X \in [1; 2; 5]$ annehmen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist dann:

X	1	2	5
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

b) Da es insgesamt drei Worte gibt, die weniger als Buchstaben enthalten, muss spätestens beim vierten Zug ein Wort mit fünf Buchstaben gezogen werden. Y kann somit die Wert von 1 bis 4 annehmen.
Hinweis: $Y = 0$ kann nicht vorkommen, denn dann würde ja nicht gezogen.
$P(Y \leq 2)$ bedeutet entweder ein Wort mit fünf Buchstaben im ersten Zug oder im zweiten Zug. Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
$P(Y \leq 2) = P(Y = 1) + P(Y = 2) = \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{9}{30} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A11

In einer Klasse von 25 Schülern soll für einen Wettbewerb eine Mannschaft von 5 Schülern gebildet werden. Da man sich nicht einigen kann, wird die Zusammensetzung der Mannschaft per Los bestimmt. In einer Lostrommel befinden sich 5 Gewinnlose und 20 Nieten. Der Reihe nach zieht jeder ein Los, ohne es zunächst zu öffnen. Felix zieht zuerst, Max als Zweiter.

a) Wer hat die größere Chance, in die Mannschaft zu kommen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens einer der beiden in der Mannschaft?

Aufgabe A12

Bei einer Tombola verkauft eine Klasse 40 Lose. Unter diesen Losen sind 2 Hauptgewinne, 13 Kleingewinne und der Rest Nieten. Felix ist der erste Käufer und zieht nacheinander zwei Lose. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

A: „Felix erhält eine Niete und einen Kleingewinn."

B: "Das zweite von Felix gezogene Los ist ein Hauptgewinn."

C: "Felix zieht höchstens einen Kleingewinn."

Aufgabe A13

In einer Klinik soll die Wirksamkeit eines neuen Medikaments getestet werden. Das Medikament wird in Packungen zu je 10 Tabletten an Patienten abgegeben. Man weiß, dass bei vielen Patienten auch Placebos (das sind Tabletten ohne Wirkstoff) die gleiche Wirkung haben wie die echten Tabletten. Daher wird in jeder Packung eine Tablette durch ein Placebo ersetzt.

a) Ein Patient entnimmt aus einer Packung nacheinander zwei Tabletten. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

A: "Nur die erste Tablette enthält das Medikament."

B: „Beide Tabletten enthalten das Medikament."

C: "Eine der beiden Tabletten ist das Placebo."

b) Eine weitere Packung ist äußerlich identisch mit den anderen, enthält aber zwei Placebos. Ein Patient bekommt beide Packungen. Er wählt eine der Packungen aus und entnimmt ihr eine Tablette.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält diese Tablette das Medikament?

Aufgabe A14

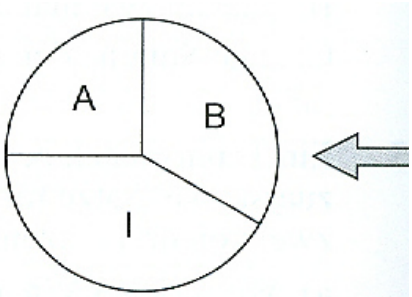
In einer Schachtel liegen vier Tischtennisbälle, drei davon sind gelb und einer weiß.

a) Man zieht zweimal nacheinander mit Zurücklegen einen Ball aus der Schachtel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die Bälle verschiedene Farben?

b) Max und Felix einigen sich auf folgendes Spiel:
Sie ziehen ohne Zurücklegen abwechselnd jeweils einen Ball aus der Schachtel. Wer zuerst den weißen Ball zieht, hat gewonnen.
Beide überlegen, ob es geschickt ist, den ersten Zug zu machen.

Aufgabe A15

Ein Glücksrad ist mit den Beschriftungen A, B und I wie abgebildet versehen. Die Mittelpunktswinkel der entsprechenden Kreisausschnitte haben die Weiten $90\,°$, $120\,°$ und $150\,°$.

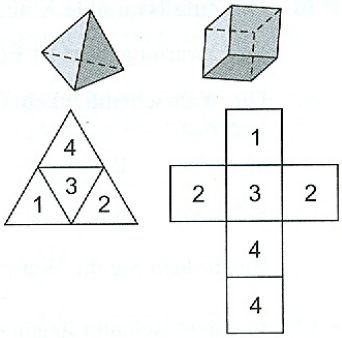


Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei drei Drehungen

a) die Buchstaben in der Reihenfolge ABI,
b) mindestens einmal den Buchstaben B,
c) die Buchstabenfolge AB erhält?

Aufgabe A16

Ein Tetraeder und ein Würfel werden gleichzeitig geworfen. Anders als beim Würfel gilt beim Tetraeder die Zahl als geworfen, die unten liegt. Die Seiten sind mit Zahlen wie in den Netzen abgebildet beschriftet.

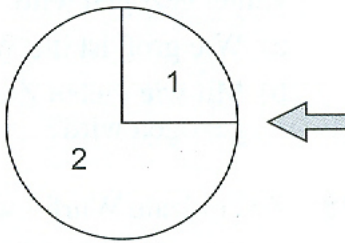


Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

A: "Man würfelt zwei ungerade Zahlen."
B: "Man erhält mindestens eine ungerade Zahl."
C: "Die Summe der Zahlen beträgt 6."
D: "Die Zahl auf dem Tetraeder ist kleiner als die auf dem Würfel."

Aufgabe A17

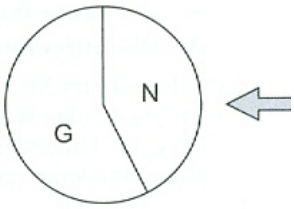
Das abgebildete Glücksrad wird zweimal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten dabei nur gleiche Ziffern auf?



Beschreibe, wie man das einmalige Drehen des Glücksrades mithilfe einer idealen Münze simulieren könnte.

Aufgabe A18

Ein Glücksrad hat zwei Sektoren, beschriftet mit den Buchstaben G und N. Die Wahrscheinlichkeit für den Buchstaben G bei einer Drehung ist p. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.



a) Bestimmen Sie für $p = \frac{1}{4}$ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
   A: "Es erscheinen verschiedene Buchstaben."
   B: "Mindestens einmal erscheint der Buchstabe G."
b) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einmal der Buchstabe N erscheint, ist $0{,}64$. Wie groß ist dann p?

Aufgabe A19

Eine Urne enthält drei schwarze Kugeln, zwei rote Kugeln und eine grüne Kugel.

a) Es werden nacheinander ohne Zurücklegen zwei Kugeln aus der Urne gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
   A: „Beide Kugeln haben verschiedene Farben."
   B: "Die zweite Kugel ist schwarz oder grün."
b) Aus der Urne werden nacheinander vier Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine rote Kugel dabei ist?

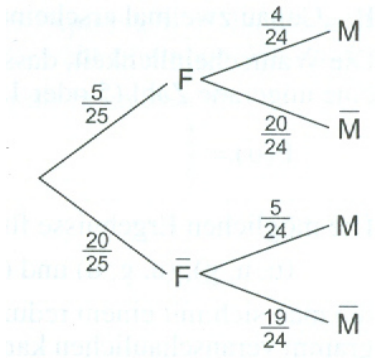
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A11

Lösungslogik

a) Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
$F/\overline{F}$: Felix zieht ein/kein Gewinnlos.
$M/\overline{M}$: Max zieht ein/kein Gewinnlos.

b) Mindestens einer kommt in die Mannschaft ist das Gegenereignis zu „keiner von beiden kommt in die Mannschaft".



Klausuraufschrieb

a) Felix im ersten Zug Gewinnlos:
$P(F) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$
Max im zweiten Zug:
$P(M) = \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} + \frac{20}{25} \cdot \frac{5}{24} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.
Die Chance, in die Mannschaft zu kommen, ist für beide gleich groß.

b) A: „Mindestens einer kommt in die Mannschaft."
$\overline{A}$: „Keiner kommt in die Mannschaft."
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} = 1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30}$

Lösung A12

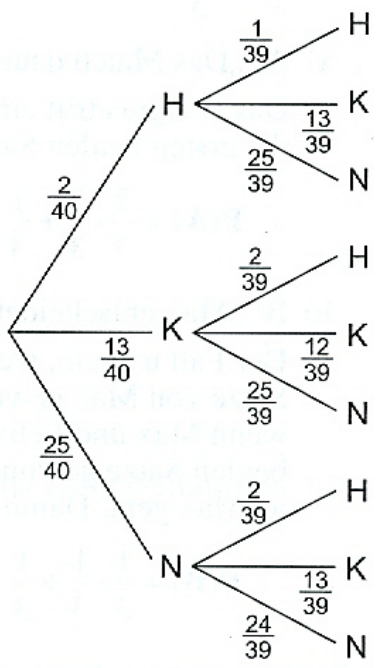
Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
H: Felix zieht einen Hauptgewinn.
K: Felix zieht einen Kleingewinn.
N: Felix zieht eine Niete.

A: „Felix erhält eine Niete und einen Kleingewinn."
Ereignisraum: (p_N, p_K); (p_K, p_N)

B: "Das zweite von Felix gezogene Los ist ein Hauptgewinn."
Ereignisraum: $(p_H, p_H); (p_K, p_H)$; (p_N, p_H)

C: "Felix zieht höchstens einen Kleingewinn."
Ereignisraum: $(p_{\overline{K}}, p_{\overline{K}})$; $(p_K, p_{\overline{K}}); (p_{\overline{K}}, p_K)$
Das Gegenereignis ist $\overline{C}$: „Felix zieht zwei Kleingewinne.



Klausuraufschrieb

$P(A) = \frac{25}{40} \cdot \frac{13}{39} + \frac{13}{40} \cdot \frac{25}{39} = 2 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

$P(B) = \frac{2}{40} \cdot \frac{1}{39} + \frac{13}{40} \cdot \frac{2}{39} + \frac{25}{40} \cdot \frac{2}{39} = \frac{78}{1560} = \frac{1}{20}$

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{13}{40} \cdot \frac{12}{39} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$

Lösung A13

Lösungslogik

a) Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
b) Der erste Zug ist Ziehen einer Schachtel mit $p = 0{,}5$.

Klausuraufschrieb

a) $P(A) = \left(\frac{9}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{10} = 10\,\%$

$P(B) = \left(\frac{9}{10}\right) \cdot \left(\frac{8}{9}\right) = \frac{8}{10} = 80\,\%$

$P(C) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = 20\,\%$

b) $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} = \frac{17}{20} \approx 85\,\%$

Lösung A14

Lösungslogik

a) Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen. aufstellen des Ereignisraums.
b) Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen. aufstellen des Ereignisraums.

Klausuraufschrieb

a) Ereignisraum „unterschiedliche Farben“: $(g, w); (w, g)$

$P\{(g, w); (w, g)\} = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

b) $P\left(Max_{weiß;1}\right) = \frac{1}{4}$

$P\left(Max_{gelb;1}, Felix_{weiß;2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

$P\left(Max_{gelb;1}, Felix_{gelb;2}, Max_{weiß;3}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot = \frac{1}{4}$

$P\left(Max_{gelb;1}, Felix_{gelb;2}, Max_{gelb;3}, Felix_{weiß;4}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4}$

$P(Max_{weiß}) = P\left(Max_{weiß;1}\right) + P\left(Max_{weiß;3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(Felix_{weiß}) = P\left(Felix_{weiß;2}\right) + P\left(Felix_{weiß;4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Es ist unwesentlich, wer das Spiel beginnt, da für beide Spieler die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ beträgt.

Lösung A15

Lösungslogik

a) Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Buchstaben sind proportional zum Kreisumfang ($360° \triangleq 100\,\%$).
b) Mindestens einmal der Buchstabe B ist das Gegenereignis zu kein mal der Buchstabe B.
c) Aufstellen des Ereignisraums.

Hinweis zum Ereignis (AB):
Zwar wird dreimal gezogen, sodass das Ereignis (AB) auftritt mit (ABA), (ABB) und (ABI), da hier jedoch im dritten Zug alle überhaupt möglichen Ereignisse vorkommen und $p_A + p_B + p_I = 1$ ist, braucht das Ereignis (AB) nur bis zum zweiten Zug betrachtet zu werden.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

a) $p_A = \frac{1}{4};\ p_B = \frac{1}{3};\ p_I = \frac{5}{12}$

$P(ABI) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{144}$

b) E: „mindestens einmal der Buchstabe B.„

$\overline{E}$: „kein mal der Buchstabe B.„

$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$

c) Ereignisraum: $(AB); (A; AB); (B; AB); (I, AB)$

$p = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12}\right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Lösung A16

Lösungslogik

a) und b)

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.

c) Bei Würfelexperimenten lohnt es sich, eine Ereignistabelle aufzustellen. Der Ereignisraum ist nebenstehend in orange markiert.

d) Der Ereignisraum ist in der nebenstehenden zweiten Grafik orange markiert.

Wertigkeit jedes Ereignisses ist $\frac{1}{24}$

W/T	1	2	2	3	4	4
1	11	12	12	13	14	14
2	21	22	22	23	24	24
3	31	32	32	33	34	34
4	41	42	42	43	44	44

Wertigkeit jedes Ereignisses ist $\frac{1}{24}$

W/T	1	2	2	3	4	4
1	11	12	12	13	14	14
2	21	22	22	23	24	24
3	31	32	32	33	34	34
4	41	42	42	43	44	44

Klausuraufschrieb

a) $p_{ungerade_T} = \frac{1}{2};\ p_{ungerade_W} = \frac{1}{3}$

$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

b) $\overline{B}$: "keine ungerade Zahl"

$P(B) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

c) Ereignisraum: $(2,4);\ (2,4); (3,3);\ (4,2);\ (4,2)$

$P(C) = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{24}$

d) Ereignisraum: $(1,2);\ (1,2); (1,3);\ (1,4);\ (1,4)$
$(2,3);\ (2,4); (2,4)$
$(3,4);\ (3,4)$

$P(D) = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

Lösung A17

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.

Gesucht ist ein Zufallsexperiment mit einer Münze, bei dem das Ereignis A und sein Gegenereignis B mit den Wahrscheinlichkeiten $P(A) = \frac{1}{4}$ und $P(B) = \frac{3}{4}$ auftreten.

Klausuraufschrieb

Wertigkeit $P(1) = \frac{1}{4};\ P(2) = \frac{3}{4}$

Ereignisraum: $(1,1);\ (2,2)$

$p = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}$

Bei zweimaligem Wurf einer Münze gilt z.B. für das Ereignis $A = \{WW\}$

$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Für das Gegenereignis $B = \{WZ; ZW; ZZ\}$ gilt dann

$P(B) = 1 - P(A) = \frac{3}{4}$.

Interpretiert man das Ereignis A als Auftreten der 1 und B als Auftreten der 2 beim Glücksrad, so kann auf diese Weise eine Drehung des Glücksrades durch einen Doppelwurf einer idealen Münze simuliert werden.

Lösung A18

Lösungslogik

Die Wahrscheinlichkeit $P(G) = p$ ist gegeben. Dann ist $P(N) = 1 - p$.

Klausuraufschrieb

a) $P(G) = p;\ \ P(N) = 1 - p$

$P(A) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16}$

b) N: „Mindestens einmal N„

$\overline{N}$: „Kein mal N„

$P(\overline{N}) = P(G)$

$P(N) = 1 - P(G) = 0{,}64$

$0{,}64 = 1 - p^2 \quad \Longrightarrow \quad p = 0{,}6$

Die Wahrscheinlichkeit für den Buchstaben G bei einer Drehung ist $0{,}6$.

Lösung A19

Lösungslogik

a) Ziehen ohne Zurücklegen, damit Veränderung der Einzelwahrscheinlichkeiten. Wir stellen jeweils den Ereignisraum auf.

b) Ziehen mit Zurücklegen, $B_{4;\frac{1}{3}}$-verteiltes Experiment mit $k = 1$.

Klausuraufschrieb

a) A: „Beide Kugeln haben unterschiedliche Farben"

$\overline{A}$: „Beide Kugeln haben gleiche Farben"

Ereignisraum für $\overline{A}$: $(ss);\ (rr)$

$p_{ss} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5};\quad p_{rr} = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{11}{15}$

B: „Die zweite Kugel ist schwarz oder grün"

$\overline{B}$: „Die zweite Kugel ist rot"

Ereignisraum für $\overline{B}$: $(rr);\ (\overline{r}r)$

$p_{rr} = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

$p_{\overline{r}r} = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

$P(B) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{15} = \frac{2}{3}$

b) $B_{4;\frac{1}{3}}$-verteilt:

$B_{4;\frac{1}{3}}(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 4 \cdot \frac{8}{81} = \frac{32}{81}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A20

Die Flächen eines Tetraederwürfels sind mit den Zahlen 1 bis 4 beschriftet. Als gewürfelt gilt die Zahl, auf der der Würfel zu liegen kommt. Der Würfel wird viermal geworfen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man viermal die gleiche Zahl?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal eine Zahl größer 2 zu werfen?
c) Die Ergebnisse in der gewürfelten Reihenfolge bilden einer vierstellige Zahl. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Zahl größer als 1144?

Aufgabe A21

In einem Behälter liegen fünf blaue, drei weiße und zwei rote Kugeln. Mona zieht eine Kugel, notiert die Farbe und legt die Kugel wieder zurück. Danach zieht sie eine zweite Kugel.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gleichfarbige Kugeln gezogen werden?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den beiden gezogenen Kugeln eine rot und eine weiß ist?

Aufgabe A22

In einem Gefäß befinden sich eine weiße, vier rote und fünf blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine der gezogenen Kugeln rot ist?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine der gezogenen Kugeln rot ist?

Aufgabe A23

In einem Behälter befinden sich drei blaue und drei rote Kugeln. Viola führt zwei Zufallsexperimente durch:

Experiment 1: Sie zieht zwei Kugeln mit Zurücklegen.
Experiment 2: Sie zieht zwei Kugeln ohne Zurücklegen.

Sie vermutet: "In beiden Experimenten ist die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen, fünfzig Prozent."
Überprüfe diese Vermutung.

Aufgabe A24

Für eine Geburtstagsparty werden 20 Glückskekse gebacken, unterschiedlich gefüllt und in einen Korb gelegt:
12 Kekse enthalten jeweils ein Sprichwort.
6 Kekse enthalten jeweils einen Witz, die restlichen werden mit jeweils einem Kinogutschein gefüllt.

a) Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis "mit einem Zug ein Sprichwort ziehen"?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "beim gleichzeitigen Ziehen von zwei Glückskeksen unterschiedliche Füllungen erhalten"?

Aufgabe A25

Seit dem Jahr 2007 können Städte und Kommunen Umweltzonen zur Reduzierung des Schadstoffausstoßes durch Fahrzeuge einrichten.
Zur Kennzeichnung werden grüne, gelbe und rote Plaketten verwendet.
In einem Parkhaus stehen 51 Autos mit einer grünen, 23 Autos mit einer gelben und 11 Autos mit einer roten Umweltplakette.
An der Ausfahrt fahren zwei Autos nacheinander aus.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden ausfahrenden Autos Plaketten mit gleicher Farbe?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der beiden ausfahrenden Autos eine grüne Plakette hat?

Aufgabe A26

In einer Schale liegen gleich aussehende Schokowürfel.
Sechs Schokowürfel sind mit Marzipan, vier mit Nougat und zwei mit Karamell gefüllt. Anastasia zieht gleichzeitig zwei Schokowürfel mit unterschiedlichen Füllungen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht sie zwei Schokowürfel mit unterschiedlichen Füllungen?

In einer anderen Schale liegen von jeder Sorte halb so viele Schokowürfel (dreimal Marzipan, zweimal Nougat, einmal Karamell). Leon zieht ebenfalls zwei Schokowürfel mit einem Griff.

b) Er behauptet: „Die Wahrscheinlichkeit zwei Schokowürfel mit unterschiedlichen Füllungen zu ziehen bleibt gleich."
Hat Leon recht? Begründe durch Rechnung.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A20

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen. Pro Teilaufgabe wird der Ereignisraum aufgestellt und daraus die Wahrscheinlichkeit berechnet.

Klausuraufschrieb

a) Ereignisraum:
$E = \{(1111); (2222); (3333); (4444)\}$
A: „Viermal die gleiche Zahl würfeln".
$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} = \frac{4}{256} = \frac{1}{64}$.

b) A: „Mindestens einmal eine Zahl größer 2."
B: „Eine Zahl größer 2 werfen."
C: „Eine Zahl kleiner 3 werfen."
Für einen einzigen Wurf gilt:
$P(B) = \frac{1}{2} = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
Für vier Würfe gilt:
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

c) A: „Eine Zahl größer als 1144 werfen."
Bis zur Zahl 1144 existieren 4^2 Kombinationen. Insgesamt gibt es 4^4 Kombinationen. Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist somit
$P(A) = \frac{4^4 - 4^2}{4^4} = 1 - \frac{4^2}{4^4} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

Lösung A21

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen mit Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei gleichfarbige Kugeln.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für eine Kugel rot und eine Kugel weiß.

Klausuraufschrieb

$P(blau) = \frac{5}{10}$ $\quad P(weiß) = \frac{3}{10}$ $\quad P(rot) = \frac{2}{10}$

$P(zwei\ gleichfarbene\ Kugeln) = P\{(b;b), (w;w), (r,r)\}$

$P(b;b) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{25}{100}$ $\quad P(w;w) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$ $\quad P(r;r) = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{100}$

$P(zwei\ gleichfarbene\ Kugeln) = P(b;b) + P(w;w) + P(r;r)$
$= \frac{25}{100} + \frac{9}{100} + \frac{4}{100} = \frac{38}{100} = 38\ \%$

$P(eine\ weiße\ und\ eine\ rote\ Kugel) = P\{(w;r), (r;w)\}$

$P(w;r) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{6}{100}$ $\quad P(r;w) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{100}$

$P(eine\ weiße\ und\ eine\ rote\ Kugel) = P(w;r) + P(r;w) = \frac{6}{100} + \frac{6}{100} = \frac{12}{100} = 12\ \%$

Lösung A22

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln für das erste Ziehen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Kugeln. Zwei verschiedenfarbige Kugeln ist das Gegenereignis zu zwei gleichfarbige Kugeln. Da nur eine einzige Kugel weiß ist, ist das Gegenereignis mit $P(r;r)$ und $P(w;w)$ sehr schnell ermittelt.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für höchstens eine Kugel rot. Höchstens eine Kugel rot bedeutet eine oder keine rote Kugel. Das Gegenereignis hierzu sind zwei rote Kugeln.

Klausuraufschrieb

$P(weiß) = \frac{1}{10}$ $\quad P(rot) = \frac{4}{10}$ $\quad P(blau) = \frac{5}{10}$

Zwei verschiedenfarbige Kugeln:

$$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = 1 - P\{(r;r),(b;b)\}$$
$$P(r;r) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{12}{90} \quad P(b;b) = \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{20}{90}$$
$$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = 1 - \big(P(r;r) + P(b;b)\big)$$
$$= 1 - \frac{12}{90} - \frac{20}{90} = \frac{58}{90}$$
$$P(zwei\ verschiedenfarbige\ Kugeln) \approx 64{,}4\ \%$$

Höchstens eine Kugel ist rot:

$$P(höchstens\ eine\ rote\ Kugel) = 1 - P(r;r) = 1 - \frac{12}{90} = \frac{78}{90} \approx 86{,}7\ \%$$

Lösung A23

Lösungslogik

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenfarbigen Kugeln für das erste Ziehen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Kugeln getrennt nach mit Zurücklegen und ohne Zurücklegen.
Vergleich der beiden sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten.

Klausuraufschrieb

$P(blau) = \frac{3}{6}$ $\quad P(rot) = \frac{3}{6}$

Mit Zurücklegen:

$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P\{(b;r),(r;b)\}$$
$$P(b;r) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{9}{36} \quad P(r;b) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{9}{36}$$
$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P(b;r) + P(r;b) = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{18}{36} = 50\ \%$$

Ohne Zurücklegen:

$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P\{(b;r),(r;b)\}$$
$$P(b;r) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{30} \quad P(r;b) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{30}$$
$$P(2\ verschiedenfarbige\ Kugeln) = P(b;r) + P(r;b) = \frac{6}{30} + \frac{6}{30} = \frac{12}{30} = 40\ \%$$

Violas Vermutung ist falsch.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A24

Lösungslogik

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenen Keksfüllungen für den ersten Zug.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „mit einem Zug ein Sprichwort" ziehen.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „unterschiedliche Füllung beim gleichzeitigen Ziehen von zwei Keksen".

Hinweis: Gleichzeitiges Ziehen von zwei Keksen muss als Ziehen hintereinander ohne Zurücklegen betrachtet werden.

Klausuraufschrieb

$P(Witz) = \frac{6}{20}$ $\quad P(Sprichwort) = \frac{12}{20}$ $\quad P(Gutschein) = \frac{2}{20}$

A: *„Mit einem Zug ein Sprichwort"*

$P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 60\ \%$

B: *„Unterschiedliche Füllungen beim gleichzeitigen Ziehen zweier Kekse"*

$P(B) = \{(W;S),(S;W),(W;G),(G;W),(S;G),(G;S)\}$

$P(W;S) = \frac{6}{20}\cdot\frac{12}{19} = \frac{72}{380}$ $\quad P(S;W) = \frac{12}{20}\cdot\frac{6}{19} = \frac{72}{380}$

$P(W;G) = \frac{6}{20}\cdot\frac{2}{19} = \frac{12}{380}$ $\quad P(G;W) = \frac{2}{20}\cdot\frac{12}{19} = \frac{72}{380}$

$P(S;G) = \frac{12}{20}\cdot\frac{2}{19} = \frac{24}{380}$ $\quad P(G;S) = \frac{2}{20}\cdot\frac{12}{19} = \frac{24}{380}$

$P(B) = 2\cdot\left(\frac{72+12+24}{380}\right) = \frac{108}{190} = \frac{54}{95} \approx 56{,}8\ \%$

Lösung A25

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.
Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die erste Ausfahrt eines Autos pro Plakette.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „beide Autos haben Plaketten mit gleicher Farbe".
Berechnung der Wahrscheinlichkeit „mindestens eines der beiden Autos hat eine grüne Plakette". Hierzu erklären wir die gelben und roten Plaketten zu „nicht grün" und berechnen die Wahrscheinlichkeit über das Gegenereignis.

Klausuraufschrieb

$P(grün) = \frac{51}{85}$ $\quad P(gelb) = \frac{23}{85}$ $\quad P(rot) = \frac{11}{85}$

A: *„beide ausfahrenden Autos haben gleichfarbige Plaketten"*

$P(A) = P\{(gr;gr);(ge;ge);(ro;ro)\}$

$P(gr;gr) = \frac{51}{85}\cdot\frac{50}{84} = \frac{2550}{7140}$ $\quad P(ge;ge) = \frac{23}{85}\cdot\frac{22}{84} = \frac{506}{7140}$ $\quad P(ro;ro) = \frac{11}{85}\cdot\frac{10}{84} = \frac{110}{7140}$

$P(A) = \frac{2550+506+110}{7140} = \frac{3166}{7140} \approx 44{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Autos gleichfarbige Plaketten haben, beträgt $44{,}3\ \%$.

B: „mindestens eines der ausfahrenden Autos hat eine grüne Plakette"

$P(B) = 1 - P(\overline{gr};\overline{gr})$

$P(\overline{gr};\overline{gr}) = \frac{34}{85}\cdot\frac{33}{84} = \frac{1122}{7140}$

$P(B) = 1 - \frac{1122}{7140} = \frac{6018}{7140} = \frac{59}{70} \approx 84{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der Autos eine grüne Plakette hat, beträgt $84{,}3\ \%$.

Lösung A26

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen von zwei Schokowürfeln ist zu behandeln wir Ziehen nacheinander von zwei Schokowürfeln ohne Zurücklegen.
Die möglichen Ereignisse „Zwei unterschiedliche Füllungen" sind:

„Marzipan; Nougat", „Marzipan; Karamell", „Nougat; Marzipan",
„Karamell; Marzipan", Nougat; Karamell" und „Karamell; Nougat".

Wir müssen also sechs Einzelwahrscheinlichkeiten ermitteln und diese dann aufsummieren.
Wesentlich weniger Rechenaufwand entsteht, wenn wir über das Gegenereignis gehen. Das Gegenereignis von „Zwei unterschiedliche Füllungen" ist „Zwei gleiche Füllungen". Diese Einzelwahrscheinlichkeiten sind dann:

„Marzipan; Marzipan", „Nougat; Nougat" und „Karamell; Karamell"

Aus $1-$ „Zwei gleiche Füllungen" erhalten wir dann das Endergebnis.
Leon hat nicht Recht, Nachweis siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

$P(unterschiedliche\,) = 1 - P(gleiche)$

$P(gleiche) = P(M;M) + P(N;N) + P(K;K)$

$P(M;M) = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{30}{132}$ $\quad P(N;N) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{12}{132}$ $\quad P(K;K) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{132}$

$P(unterschiedliche) = 1 - \left(\frac{30}{132} + \frac{12}{132} + \frac{2}{132}\right) = 1 - \frac{44}{132} = \frac{88}{132} = \frac{2}{6} = 66{,}7\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, zwei unterschiedliche Füllungen zu ziehen beträgt $66{,}7\ \%$*.*
Leon hat nicht recht, denn:

$P(M;M) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30}$ $\quad P(N;N) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{30}$

$P(K;K) = \frac{1}{6} \cdot \frac{0}{5} = 0$

$P(unterschiedliche) = 1 - \left(\frac{6}{30} + \frac{2}{30} + 0\right) = 1 - \frac{8}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15} = 73{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, zwei unterschiedliche Füllungen aus der zweiten Schale zu ziehen beträgt $73{,}3\ \%$*.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

In einer Schachtel liegen fünf weiße Kugeln und eine schwarze Kugel. Aus der Schachtel wird wiederholt eine Kugel zufällig gezogen. Ist die gezogene Kugel schwarz, wird sie in die Schachtel zurückgelegt. Ist sie weiß, wird an ihrer Stelle eine schwarze Kugel in die Schachtel gelegt.

a) Aus der Schachtel wird dreimal gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
A: "Genau eine Kugel ist schwarz."
B: "Mindestens eine Kugel ist schwarz."

b) Wie oft muss man mindestens ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $99{,}9\,\%$ mindestens eine weiße Kugel zu erhalten?

Aufgabe A2

In einer Urne befinden sich zwei rote und eine bestimmte Anzahl schwarzer Kugeln. Es werden zwei Kugeln mit einem Griff gezogen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens eine der Kugeln schwarz, wenn die Urne drei schwarze Kugeln enthält?

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln rot sind, beträgt nun $\frac{1}{36}$. Wie viele schwarze Kugeln sind in der Urne?

Aufgabe A3

In einer Urne befinden sich fünf rote und eine bestimmte Anzahl schwarzer Kugeln. Insgesamt passen höchstens 50 Kugeln in die Urne. Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugeln verschiedene Farben haben, wenn in der Urne zwei schwarze Kugeln sind?

b) Wie groß muss die Anzahl der schwarzen Kugeln in der Urne sein, damit die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedene Farben zu ziehen, maximal ist?

Aufgabe A4

Ein Betrieb produziert Schrauben, die mit einer Wahrscheinlichkeit von $25\,\%$ fehlerhaft sind. Vor der Auslieferung an den Kunden werden die Schrauben durch ein Prüfgerät kontrolliert.
Das Prüfgerät findet $95\,\%$ der fehlerhaften Schrauben, hält aber auch $10\,\%$ der einwandfreien Schrauben für fehlerhaft. Diese Schrauben kommen nicht in der Verkauf.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: „Eine fehlerhafte Schraube kommt in den Verkauf."
B: „Eine einwandfreie Schraube wird nicht verkauft."
C: „Das Prüfgerät trifft eine falsche Entscheidung.

b) Das Prüfgerät soll so verbessert werden, dass die Wahrscheinlichkeit für eine falsche Entscheidung höchstens $2\,\%$ beträgt. Dazu soll der Anteil p der einwandfreien Schrauben, die das Prüfgerät fehlerhaft aussortiert, gesenkt werden. Wie groß darf p höchstens sein?

Lösung A1

Lösungslogik

Ziehen mit Zurücklegen, jedoch mit Veränderung der Anzahl schwarzer Kugeln. Aufstellen des Ereignisraums und der Wahrscheinlichkeiten nach den Pfadregeln.

Klausuraufschrieb

a) A: „Genau eine Kugel ist schwarz"

Ereignisraum: $(sww); (wsw); (wws)$

$P(sww) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{216}$

$P(wsw) = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{40}{216}$

$P(wws) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{60}{216}$

$P(A) = P(ssw) + P(wsw) + P(wws) = \frac{20+40+60}{216} = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$

B: „Mindestens eine Kugel ist schwarz"

$\overline{B}$: „Alle Kugeln sind weiß"

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = 1 - \frac{60}{216} = \frac{13}{18}$

b) C: „Mindestens eine Kugel ist weiß"

$\overline{C}$: „Alle Kugeln sind schwarz"

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n > 0{,}999$

$\left(\frac{1}{6}\right)^n < 0{,}001 \quad | \quad ln$

$n \cdot ln\left(\frac{1}{6}\right) < ln(0{,}001) \quad | \quad : ln\left(\frac{1}{6}\right)$

$n > \frac{ln(0{,}001)}{ln\left(\frac{1}{6}\right)} \quad \Rightarrow \quad n > 3{,}855$

Man muss mindestens 4–mal ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $99{,}9\,\%$ mindestens eine weiße Kugel zu erhalten.

Lösung A2

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen von zwei Kugeln entspricht nacheinander Ziehen von einer Kugel ohne Zurücklegen. Aufstellen des Ereignisraums und der Wahrscheinlichkeiten nach den Pfadregeln.

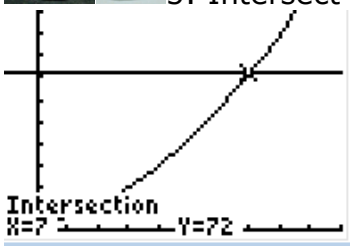
GTR-Einstellungen

Y1: 72

Y2: $(2 + X) * (1 + X)$

GTR-Lösung zu b)

5: Intersect



Klausuraufschrieb

a) A: „Mindestens einer der Kugeln ist schwarz"

$\overline{A}$: „Beide Kugeln sind rot"

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{2}{20} = \frac{9}{10} = 90\,\%$

b) B: „Beide Kugeln sind rot"

$P(B) = \frac{2}{2+n} \cdot \frac{1}{1+n} = \frac{2}{(2+n)\cdot(1+n)} = \frac{1}{36}$

$72 = (2 + n) \cdot (1 + n)$

$n \overset{GTR}{=} 7$

Es befinden sich 7 schwarze Kugeln in der Urne.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A3

Lösungslogik

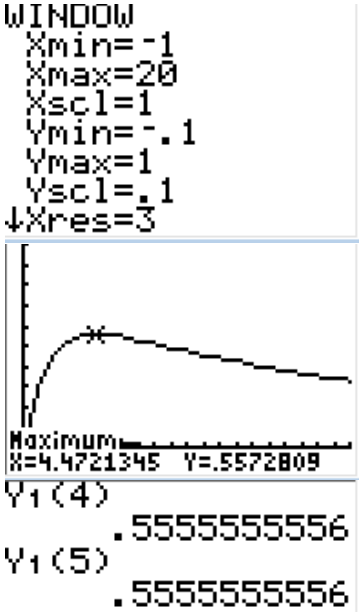
Ziehen ohne Zurücklegen. Aufstellen des Ereignisraumes und der Wahrscheinlichkeiten nach den Pfadregeln.

GTR-Einstellungen:

Y1: $10X/((5+X)*(4+X))$

GTR-Lösung zu b)

4: Maximum



Klausuraufschrieb

a) A: „Beide Kugeln haben unterschiedliche Farben mit $n_{schwarz} = 2$"

Ereignisraum: $(rs); (sr)$

$P(rs) = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{10}{42}$

$P(sr) = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{42}$

$P(A) = P(rs) + P(sr) = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$

b) B: „Beide Kugeln haben unterschiedliche Farben mit $n_{schwarz} = x$"

$P(rs) = \frac{5}{5+x} \cdot \frac{x}{4+x} = \frac{5x}{(5+x)\cdot(4+x)} = P(sr)$

$P(B(x)) = \frac{10x}{(5+x)\cdot(4+x)}$

$n_{max} \overset{GTR}{\approx} 4{,}4721 \quad \Rightarrow \quad 4 \leq n \leq 5$

$P(B_{x=4}) \overset{GTR}{=} P(B_{x=5}) \overset{GTR}{=} \frac{5}{9}$

Wenn 4 oder 5 schwarze Kugeln in der Urne liegen, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln verschiedene Farben haben, maximal.

Lösung A4

Lösungslogik

Sowohl 75 % der guten Schrauben als auch 25 % der fehlerhaften Schrauben werden geprüft. Das Prüfgerät lässt 90 % der guten Schrauben durch die Prüfung und erklärt 10 % der guten Schrauben als fehlerhaft.

95 % der fehlerhaften Schrauben werden aussortiert, jedoch 5 % der fehlerhaften Schrauben gelangen in den Verkauf.

Wir stellen den Ereignisraum auf und berechnen die einzelnen Wahrscheinlichkeiten.

Klausuraufschrieb

Elementarereignisse:

G: „Schraube ist in Ordnung", $P(G) = 0{,}75$

$\overline{G}$: „Schraube ist fehlerhaft", $P(\overline{G}) = 0{,}25$

H: „Prüfgerät erklärt G als OK", $P(H) = 0{,}90$

$\overline{H}$: „Prüfgerät erklärt G als fehlerhaft", $P(\overline{H}) = 0{,}10$

I: „Prüfgerät erklärt $\overline{G}$ als OK", $P(I) = 0{,}05$

$\overline{I}$: „Prüfgerät erklärt $\overline{G}$ als fehlerhaft", $P(\overline{I}) = 0{,}95$

a) $P(A) = P(\overline{G} \cap I) = 0{,}25 \cdot 0{,}05 = 0{,}0125$

$P(B) = P(G \cap \overline{H}) = 0{,}75 \cdot 0{,}10 = 0{,}075$

$P(C) = P(G \cap \overline{H}) + P(\overline{G} \cap I) = 0{,}75 \cdot 0{,}10 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 = 0{,}0875$

b) Gesucht p für $P(C) \leq 0{,}02$

$P(C) = P\left(G \cap \overline{H}\right) + P\left(\overline{G} \cap I\right) = 0{,}75 \cdot p + 0{,}25 \cdot 0{,}05 \leq 0{,}02$

$0{,}75 \cdot p \leq 0{,}02 - 0{,}0125$

$p \leq \frac{0{,}0075}{0{,}75} = 0{,}001$

p darf höchstens $0{,}1\,\%$ betragen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Dieses Dokument ist noch im Aufbau

Aufgabe A1

Hannah übt das Jonglieren mit drei Bällen. Dabei gelingen $75\,\%$ ihrer Versuche. Hannah probiert es achtmal.
Gib einen Term an für die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle Versuche gelingen.
b) kein Versuch gelingt.
c) mindestens sechs Versuche, aber nicht alle Versuche gelingen. Gehe dabei von dem Vorliegen einer Binomialverteilung aus.
d) Begründe, warum die Annahme einer Binomialverteilung kaum gerechtfertigt wäre, wenn Hannah 150 Versuche durchführen würde.

Aufgabe A2

Ein Laplace-Würfel wird mehrfach geworfen. Gib Ereignisse A, B und C an mit:

a) $P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^9$
b) $P(B) = 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^3$
c) $P(C) = \binom{14}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11}$

Aufgabe A3

Der Frühbus ist erfahrungsgemäß in $10\,\%$ der Fälle verspätet.

a) Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Bus fünf Tage lang stets pünktlich kommt.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit in Prozent dafür, dass der Bus an drei von fünf Tagen verspätet ist.

Aufgabe A4

a) Beweise, dass man die Funktionswerte der Binomialverteilung mit $n = 3$ und $p = 0{,}5$ erhält, indem man den entsprechenden Koeffizienten der dritten Zeile des Pascal-Dreiecks durch 8 dividiert.
b) Erstelle für diese Binomialverteilung eine Wertetabelle und ein Schaubild.

Aufgabe A5

Gegeben ist folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

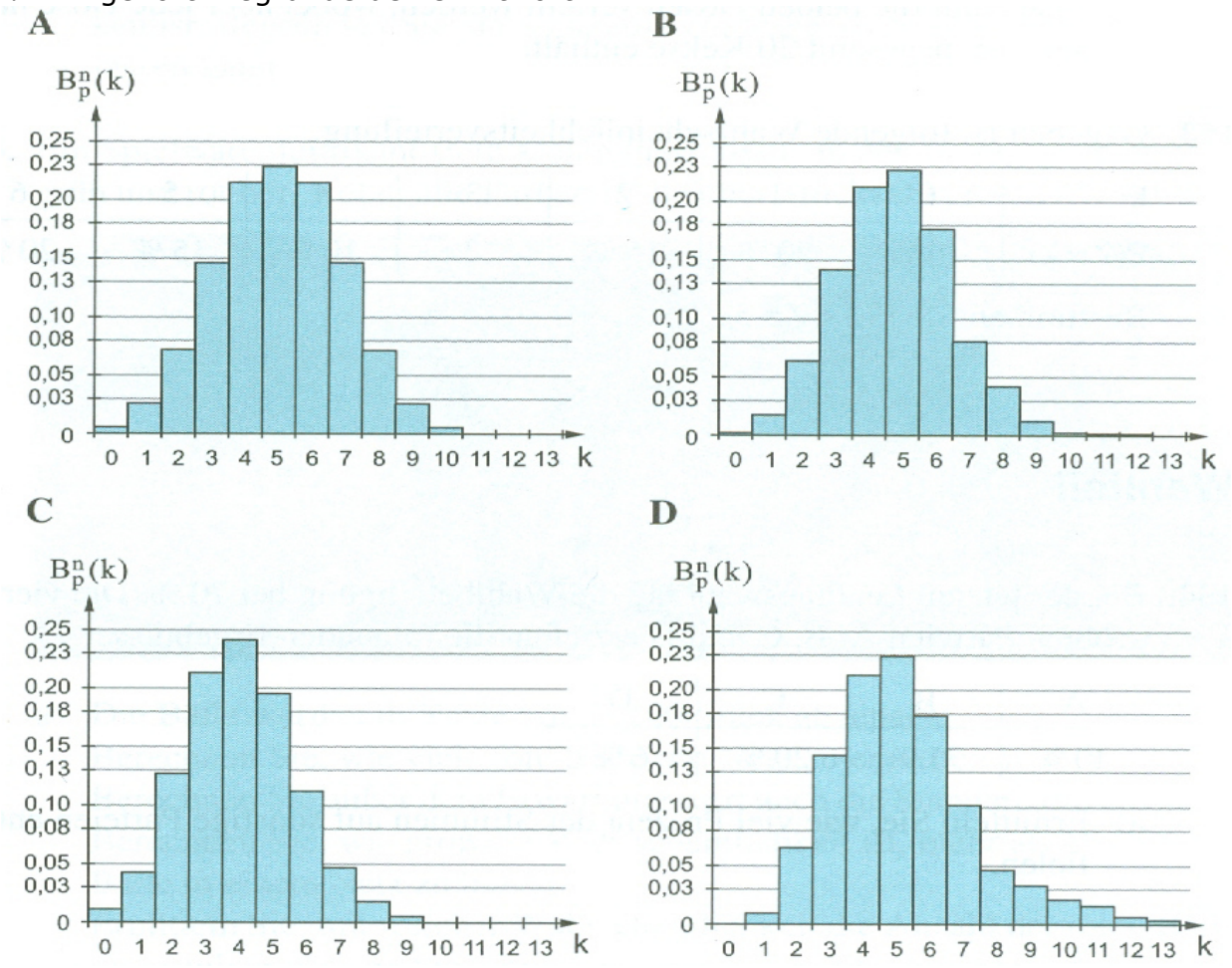
k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$10\,\%$	$20\,\%$	$15\,\%$	?	$10\,\%$	$15\,\%$	$20\,\%$

Bestimme $P(3)$ und $P(2 < X \leq 5)$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A6

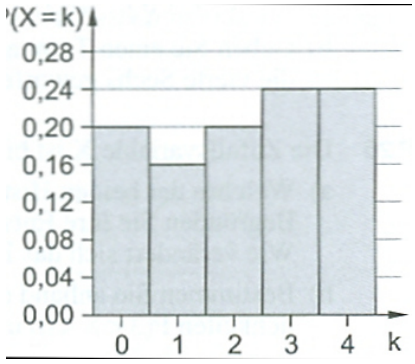
Entscheide, welches der Schaubilder zu der Binomialverteilung mit $p = 0{,}4$ und $n = 12$ gehört. Begründe deine Antwort.



Aufgabe A7

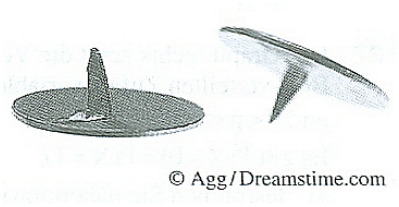
a) Begründe, dass die rechts abgebildete Graphik keine Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellen kann.

b) In einer Urne liegen 40 Kugeln. Zehn davon sind rot. Aus der Urne werden nacheinander acht Kugeln gezogen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der roten Kugeln unter den acht gezogenen Kugeln.
Ist X binomialverteilt, wenn die Ziehung:
(1) mit Zurücklegen
(2) ohne Zurücklegen erfolgt?
Begründe deine Antwort.



Aufgabe A8

Ein Reißnagel wird mehrfach geworfen. Dabei fällt er erfahrungsgemäß in $60\,\%$ der Würfe auf den Kopf, ansonsten auf die Seite. Gib die Ereignisse A, B, C und D an, für deren Wahrscheinlichkeit gilt:



$P(A) = \binom{30}{20} \cdot 0,6^{20} \cdot 0,4^{10}$

$P(B) = \binom{10}{0} \cdot 0,6^{0} \cdot 0,4^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,6^{1} \cdot 0,4^{9}$

$P(C) = \binom{8}{7} \cdot 0,6^{7} \cdot 0{,}4 + 0,6^{8}$

$P(D) = \binom{25}{10} \cdot 0,4^{10} \cdot 0,6^{15}$

Aufgabe A9

Ein idealer Würfel wird zehnmal geworfen.

a) Wähle die beiden Terme aus, welche die Wahrscheinlichkeit beschreiben, dass dabei genau viermal eine Sechs auftritt. Begründe deine Entscheidung.

(1) $\binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6$ (2) $\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6$ (3) $1 - \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$

(4) $\binom{10}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$ (5) $\binom{10}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4$ (6) $\binom{10}{4} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6$

b) Geben Sie einen Term an, der die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass im 10. Wurf die vierte Sechs geworfen wird.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Lösungslogik

a) und b)

Die Wahrscheinlichkeit für das Gelingen ist gegeben mit $p = \frac{3}{4}$.

c) Laut Aufgabentext soll von einer Binomialverteilung ausgegangen werden. Mindestens sechsmal Gelingen bedeutet 6, 7 und 8–maliges Gelingen. Da aber nicht alle Versuche gelingen sollen, fällt das letzte Gelingen 8 wieder weg.

Klausuraufschrieb

a) A: „Alle Versuche gelingen" $P(A) = \left(\frac{3}{4}\right)^8$

b) B: „Kein Versuch gelingt" $P(B) = \left(\frac{1}{4}\right)^8$

c) $P(X = 6) + P(X = 7) = \binom{8}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \binom{8}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1$

d) Bei 150 Versuchen kann man davon ausgehen, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit nicht konstant bleibt, da Hannah z.B. durch den Trainingseffekt immer besser bzw. durch Ermüdung immer schlechter wird. Jedenfalls wird die Erfolgswahrscheinlichkeit schwanken. Somit liegt keine Binomialverteilung vor.

Lösung A2

Lösungslogik

Es handelt sich um ein Laplace-Experiment. Jeder Wurf des Würfels hat die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$.

Zu b)

Hier ist das Gegenereignis beschrieben. Gegenereignisse werden in der Regel bei der Formulierung „mindestens" angewandt.

Klausuraufschrieb

a) A: „Es wird 9–mal keine 6 gewürfelt".

b) B: „Bei 3 Würfen wird mindestens einmal keine 6 gewürfelt".

c) C: „Bei 14 Würfen fällt genau dreimal eine 6".
Hinweis: Die Lösungen gelten alternativ auch für die Augenzahlen 1 bzw. 2, 3, 4 oder 5.

Lösung A3

Lösungslogik

Die Wahrscheinlichkeit für Verspätung beträgt $p = \frac{1}{10}$, somit ist die Wahrscheinlichkeit für pünktliches Erscheinen $p = \frac{9}{10}$.

Klausuraufschrieb

a) A: „Bus kommt 5 Tage lang pünktlich" $P(A) = \left(\frac{9}{10}\right)^5$

b) B: „Bus ist an 3 von 5 Tagen verspätet" $P(B) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2$

$P(B) = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^2 = \frac{10}{3} \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}81 = \frac{0{,}01}{3} \cdot 0{,}81 = 0{,}0027 = 0{,}27\ \%$

Lösung A4

Lösungslogik

Die Einträge des Pascalschen Dreiecks haben die Form des Binomialkoeffizienten „k aus n", wobei n die Zeile und k die Spalte des Dreiecks angibt ($n, k \in \mathbb{N}; k \leq n$). In dem hier betrachteten Fall ist $n = 3$. Für $0 \leq k \leq 3$ ergibt sich der Funktionswert der entsprechenden Binomialverteilung für $p = 0{,}5$.

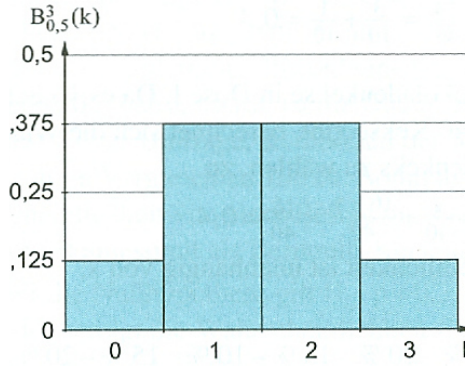
Klausuraufschrieb

a) $B_{3;0,5}(k) = \binom{3}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \binom{3}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \cdot \binom{3}{k}$

b) Die dritte Zeile des Pascalschen Dreiecks besteht aus den Einträgen 1, 3, 3 und 1. Es ergibt sich folgende Wertetabelle:

k	0	1	2	3
$B_{3;0,5}(k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Das Schaubild hat folgendes Aussehen:



Lösung A5

Klausuraufschrieb

Es gilt: $P(X = 3) = 100\% - 10\% - 20\% - 15\% - 10\% - 15\% - 20\% = 10\%$

$P(2 < X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 10\% + 10\% + 15\% = 35\%$

Lösung A6

Klausuraufschrieb

Schaubild B gehört zur Binomialverteilung $p = 0{,}4$ und $n = 12$. Wegen des Erwartungswertes mit $\mu = n \cdot p = 0{,}4 \cdot 12 = 4{,}8$ muss das Maximum bei $k = 5$ liegen. Schaubild C entfällt somit. Schaubild A ist achsensymmetrisch zur Geraden $x = 5$, dies ist nur bei $p = 0{,}5$ möglich. Schaubild D zeigt für $k = 13$ einen Wert ungleich Null. Die Binomialverteilung ist jedoch für $k > 12$ gar nicht definiert.

Lösung A7

Klausuraufschrieb

a) Bei einer Wahrscheinlichkeitsverteilung muss die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten stets gleich 1 sein. Die Addition der fünf dargestellten Werte für $k = 0; 1; 2; 3; 4$ ergibt:
$0{,}20 + 0{,}16 + 0{,}20 + 0{,}24 + 0{,}24 = 1{,}04$
Da dieser Wert größer als 1 ist, kann der abgebildete Graph keine Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) Dargestellt ist eine Bernoulli-Kette. Bei dieser
- gibt es bei jedem Zug nur zwei Ausgänge. Dies trifft hier in beiden Fällen zu. Betrachtet werden die beiden Ausgänge „rote Kugel", „keine rote Kugel".
- beeinflussen sich die einzelnen Züge nicht; die Wahrscheinlichkeit der beiden Ausgänge bleiben bei jedem Zug unverändert.

Vorgenanntes trifft nur im Fall (1) zu, die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel beträgt bei jedem Zug $0{,}25$.
Im Fall (2) gilt dies nicht, da die Gesamtanzahl der Kugeln nach jedem Zug ändert und damit auch die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel.
Somit ist nur im Fall (1) – Ziehen mit Zurücklegen – die Zufallsvariable X binomialverteilt (mit den Parametern $n = 8$ und $p = 0{,}25$, kurz $B_{4;0{,}25}$-verteilt).

Lösung A8

Klausuraufschrieb

A: „Der Reißnagel wird 30–mal geworfen und fällt 20–mal auf den Kopf."
B: „Der Reißnagel wird 10–mal geworfen und höchstens 1–mal auf den Kopf."
C: „Der Reißnagel wird 8–mal geworfen und fällt mindestens 7–mal auf den Kopf."
D: „Der Reißnagel wird 25–mal geworfen und fällt 10–mal auf die Seite."

Lösung A9

Klausuraufschrieb

a) (1) $B_{10;\frac{1}{6}}$-verteilt mit $P(X = 4)$ (genau 4–mal eine 6)
(5) $B_{10;\frac{5}{6}}$-verteilt mit $P(X = 6)$ (genau 6–mal keine 6)

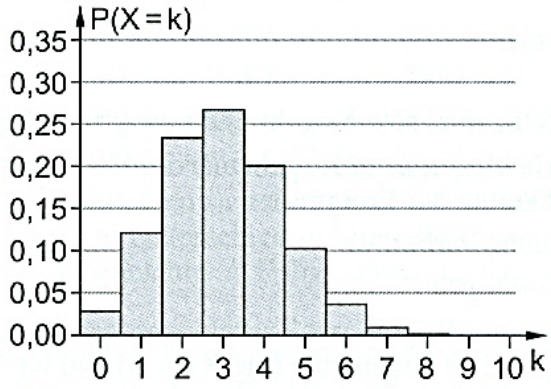
b) Im 10. Wurf die vierte 6 heißt, dass in den 9 Würfen zuvor 3 6-en gefallen sind.
$B_{9;\frac{1}{6}}$-verteilt mit $k = 3$
$B_{9;\frac{1}{6}}(X = 3) = \binom{9}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6$
Im 10. Wurf eine 6:
$p = \binom{9}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} = \binom{9}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6$

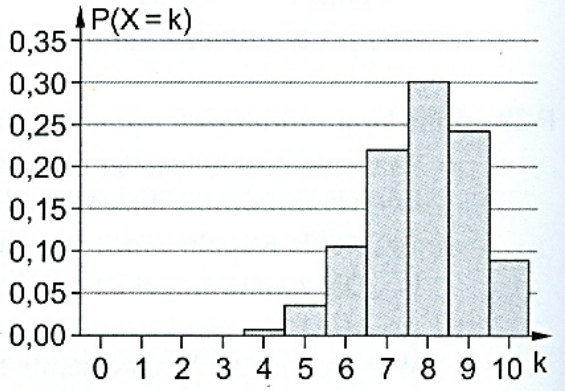
Aufgabe 10

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}3$.

a) Welches der beiden Histogramme zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ? Begründen Sie Ihre Entscheidung. Wie verändert sich das Histogramm, wenn p zunimmt?

b) Bestimme anhand der korrekten Abbildung näherungsweise die Wahrscheinlichkeiten $P(3 < X < 6)$ und $P(X \neq 4)$.





Aufgabe 11

Ein Medikament heilt eine Krankheit mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}6$.
Im Rahmen einer Erprobung des Medikaments an Patienten, die an dieser Krankheit leiden, findet sich die folgende Rechnung:

$P(X \geq 1) > 0{,}98$
$1 - (0{,}4)^n > 0{,}98$
$n > 4$

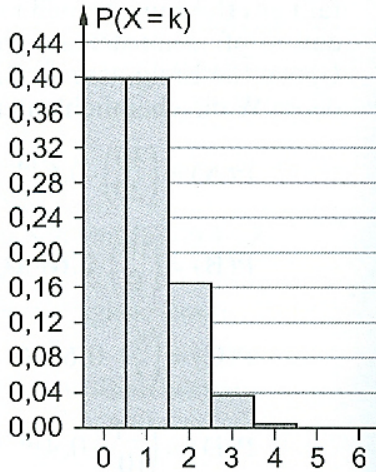
Erläutere diese Rechnung.

Aufgabe 12

Der Graph rechts zeigt die Verteilung einer $B_{n;p}$-verteilten Zufallsvariable X mit $n = 6$ und $0 < p < 1$.
Es gilt $P(X = 0) = P(X = 1)$.

a) Bestimme näherungsweise $P(X \geq 2)$.

b) Zeige mithilfe der Formel von Bernoulli, dass für die Trefferwahrscheinlichkeit gilt:
$p = \frac{1}{7}$.
(Hinweis: $\binom{6}{0} = 1$; $\binom{6}{1} = 6$)



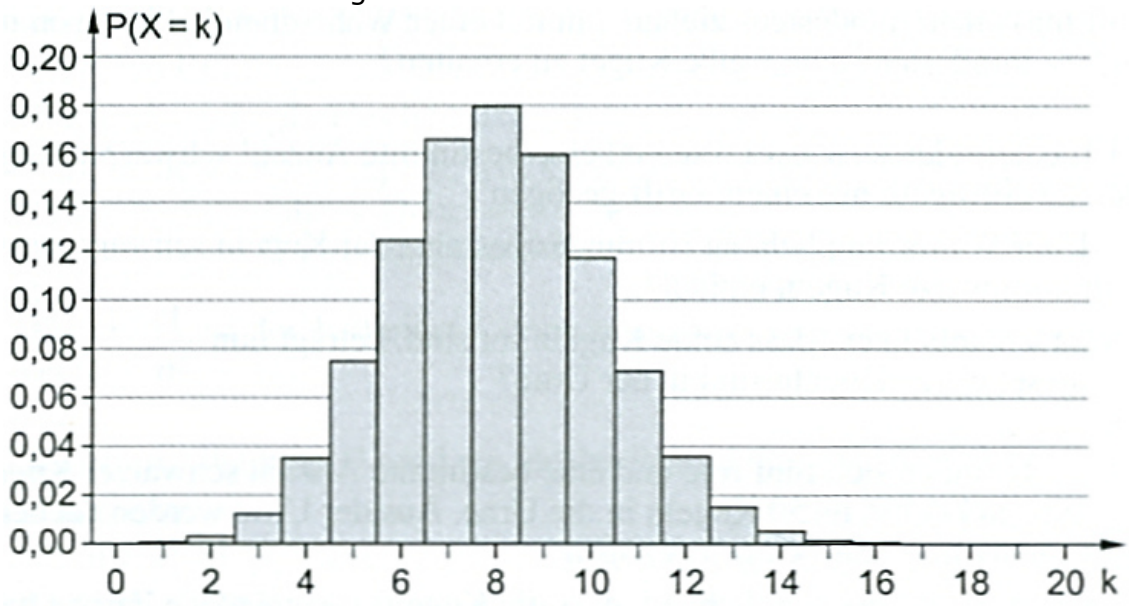
Aufgabe 13

Gummibärchen werden in den Farben Rot und Gelb produziert und in Packungen zu 20 Stück ausgeliefert.
Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der gelben Gummibärchen in einer Packung. Ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung ist durch das Histogramm unten gegeben. Der Erwartungswert von X ist eine ganze Zahl.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind 8 oder 9 gelbe Gummibärchen in einer Packung?

b) Bestimme den Parameter p der Binomialverteilung mithilfe des Histogramms. Von welchem Mischungsverhältnis kann man bei den Farben der Gummibärchen ausgehen?



Aufgabe 14

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Familie mit fünf Kindern

a) genau drei Mädchen,

b) mindestens zwei Mädchen,

c) höchstens drei Jungen,

d) vier Mädchen und ein Junge sind?

Aufgabe 15

Ist der Zufallsversuch eine Bernoulli-Kette? Wenn ja, gib die Länge und die Trefferwahrscheinlichkeit an.

a) Ein Würfel wird fünfzigmal geworfen. Es wird gezählt, wie oft eine gerade Augenzahl fällt.

b) Ein Fußballspieler hat beim Elfmeterschießen eine Trefferquote von $70\,\%$. Er schießt zehn Elfmeter und dabei wird gezählt, wie oft er trifft.

c) Ein Mathematik-Kurs besteht aus 11 Schülerinnen und 9 Schülern. Es werden 8 Personen ausgewählt und ihr Geschlecht notiert.

d) In Deutschland verfügen ca. $80\,\%$ der Haushalte über einen Internetzugang. Es werden 1000 Haushalte ausgewählt und befragt, ob sie einen Internetzugang haben.

Aufgabe 16

Ein Glücksrad besteht aus 4 gleich großen Feldern, die mit den Buchstaben A, B, C und D beschriftet sind. Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Es wird gezählt, wie oft das Feld "A" kommt. Stelle die Bernoulliformel auf und berechne:

a) $P(X = 4)$ b) $P(X = 0)$ c) $P(X \leq 2)$

Lösung A10

Lösungslogik

Der Erwartungswert bei einer Binomialverteilung ist $\mu = n \cdot p$.

Klausuraufschrieb

a) Schaubild 1 ist das Histogramm der angegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Das Maximum ist bei Binomialverteilungen im Erwartungswert mit $\mu = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}3 = 3$. Dies ist in Schaubild 2 nicht der Fall.
Nimmt p zu, so verschiebt sich das Maximum wegen $\mu = n \cdot p$ nach rechts.

b) $P(3 < X < 3) = P(4) + P(5) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$
$P(X \neq 4) = 1 - P(X = 4) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

Lösung A11

Lösungslogik

Es handelt sich um eine $B_{0,6;n}$-Verteilung.

Klausuraufschrieb

$P(X \geq 1) > 0{,}98$

X gibt die Anzahl der durch das Medikament geheilten Patienten an, in dieser Aufgabe ist die Wahrscheinlichkeit für die Heilung mindestens eines Patienten größer als $98\,\%$.

$1 - (0{,}4)^n > 0{,}98$

Der Term $(0{,}4)^n$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass von n Patienten keiner geheilt wird, d.h. $P(X = 0)$.
Somit ist $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}4^n$ die Wahrscheinlichkeit, dass von n behandelten Personen mindestens einer geheilt wird.

$n > 4$

Aus dieser Zeile der Rechnung ergibt sich, dass mindestens 5 Personen mit dem Medikament behandelt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von $98\,\%$ mindestens ein Patient geheilt wird.

Lösung A12

Lösungslogik

a) Es gilt $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$.

b) Wenn $P(X = 0) = P(X = 1) = 0{,}4$ kann $P(X = 0)$ mit $P(X = 1)$ gleichgesetzt werden.

Klausuraufschrieb

a) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

b) $P(X = 0) = \binom{6}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^6 = (1-p)^6$
$P(X = 1) = \binom{6}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^5 = \frac{6}{7} \cdot (1-p)^5$
Wegen $P(X = 0) = P(X = 1)$ gilt:
$(1-p)^6 = \frac{6}{7} \cdot (1-p)^5$
$1 - p = \frac{6}{7} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{7}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A13

Lösungslogik

Es handelt sich um eine $B_{p;20}$-Verteilung. Wegen der Aufgabenstellung „Der Erwartungswert von X ist eine ganze Zahl" lässt sich $\mu = 8$ aus der Grafik ablesen und über $\mu = n \cdot p$ ist p ermittelbar.

Klausuraufschrieb

a) $P(8 \leq X \leq 9) = P(X = 8) + P(X = 9) = 0{,}18 + 0{,}16 = 0{,}34 = 34\,\%$

b) $\mu = 8;\ \ n = 20$ | Aufgabenstellung

$\mu = n \cdot p$

$p = \frac{\mu}{n} = \frac{8}{20} = 0{,}4$

Es handelt sich um eine $B_{0{,}4;20}$-Verteilung.

Man kann von einem Mischungsverhältnis $4:6$ bzw. $2:3$ von gelben zu roten Gummibärchen ausgehen.

Lösung A14

Lösungslogik

Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette mit $n = 5$ Elementen und $p = 0{,}5$ (Junge oder Mädchen).

Klausuraufschrieb

a) Genau drei Mädchen entspricht $k = 3$.

$B_{5;0,5}(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^2 = 0{,}3125$

b) Mindestens zwei Mädchen entspricht $k \geq 2$. Dies ist das Gegenereignis zu höchstens ein Mädchen mit $k \leq 1$.

$B_{5;0,5}(X \geq 2) = 1 - B_{5;0,5}(X \leq 1) = 1 - \left(\binom{5}{0} \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^4\right) = 0{,}1875$

c) Höchstens drei Jungen sind null, einer, zwei oder drei Jungen, also

$B_{5;0,5}(X \leq 3) = \binom{5}{0} \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^4 + \binom{5}{2} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^3 + \binom{5}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^2 5$
$= 0{,}812$

d) Vier Mädchen und ein Jungen ist $X = 4 \ \vee \ X = 1$.

$B_{5;0,5}(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^1 = 0{,}15625$

$B_{5;0,5}(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^4 = 0{,}15625$

Lösung A15

Klausuraufschrieb

a) ja, es ist eine Bernoulli-Kette mit $n = 50$ und $p = 0{,}5$.

b) ja, es ist eine Bernoulli-Kette (sofern die Trefferquote gleich bleibt) mit $n = 10$ und $p = 0{,}7$.

c) nein, es ist keine Bernoulli-Kette, da es sich um eine Ziehung ohne Zurücklegen handelt und sich die Trefferwahrscheinlichkeit pro Ziehung ändert

d) ja, es ist eine Bernoulli-Kette mit $n = 1000$ und $p = 0{,}8$.

(es handelt sich zwar wie in c) um eine Ziehung ohne Zurücklegen, aber aufgrund der großen Grundgesamtheit spielt dies hier keine Rolle)

Lösung A16

Klausuraufschrieb

$B_{10;0,25}$-verteilt

a) $B_{10;0,25}(X=4)=\binom{10}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^6=0{,}1459$

b) $B_{10;0,25}(X=0)=\binom{10}{0}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}=0{,}0563$

c) $B_{10;0,25}(X\leq 2)=\binom{10}{0}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}+\binom{10}{1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9+\binom{10}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^8=0{,}5256$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe 17

Ein Jäger trifft sein Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit $40\,\%$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er bei zehn Schüssen

a) genau sechs Treffer b) mehr als sechs Treffer?

Aufgabe 18

Bei einem Automaten gewinnt man in $30\,\%$ aller Spiele. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man

a) bei 10 Spielen mindestens einmal gewinnt?

b) bei 20 Spielen achtmal gewinnt?

Aufgabe 19

In einem "Nachrichtenkanal" wird ein Zeichen mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}9$ richtig übertragen. Eine Nachricht besteht aus acht Zeichen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden höchstens zwei Zeichen falsch übertragen?

Aufgabe 20

Ein fairer Würfel wird 36-mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augenzahl 6 in der erwarteten Anzahl eintritt.

Aufgabe 21

Eine Firma produziert einen bestimmten Massenartikel mit einem Ausschussanteil von $4\,\%$.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 100 zufällig ausgewählten Artikeln mindestens 2 und höchstens 6 Ausschussartikel befinden.

Aufgabe 22

Die Musikgesellschaft "Harmonie" führt ihr Jubiläumskonzert durch. In den Pausen werden Tombola-Lose angeboten. Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn ist $10\,\%$.

a) Fritz ist ein eifriger Loskäufer. 490 Lose hat er schon gekauft und 10 Gewinne erzielt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 90 Losen höchstens 10-mal gewinnt?

b) Hans hat schon 100 Lose gekauft und dabei 16 Gewinne eingestrichen. Er behauptet, er habe eben eine besonders begabte Hand. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt man ohne besondere Begabung auf mindestens 16 Treffer?

c) Die Besucher können auch Säckchen kaufen, die je 10 zufällig ausgewählte Lose enthalten. Der Veranstalter verspricht mindestens einen Gewinn, ansonsten wird das Geld zurückerstattet. Wie groß ist das Risiko, dass der Veranstalter zahlen muss?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe 23

Wie oft muss man einen idealen Würfel mindestens werfen, wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit von

a) mehr als $90\,\%$ b) mehr als $99\,\%$

mindestens eine Sechs haben will?

Aufgabe 24

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 30$ und $0{,}25$.
Berechne:

a) $P(X = 10)$ b) $P(X \leq 10)$ c) $P(X > 5)$

d) $P(15 < X < 25)$ e) den Erwartungswert von X

f) Für welchen Wert k wird $P(X = k)$ maximal?

g) Erstelle mit dem GTR mit Hilfe von 2 Listen eine Wertetabelle für die Zuordnung $k \longrightarrow P(X = k)$.
Zeichne mit dem GTR ein Säulendiagramm für diese Zuordnung.

Aufgabe 25

Ein Spielwürfel mit den Augenzahlen 1 bis 6 wird 18-mal geworfen.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse. Gib die Ereignisse in Prozent an und runde auf eine Dezimale.

A: Es wird 6-mal eine Augenzahl gewürfelt, die größer als 4 ist.

B: Es wird mehr als 4-mal eine Augenzahl gewürfelt, die größer als 4 ist.

C: Es wird mindestens 4-mal aber höchstens 7-mal eine Augenzahl gewürfelt, die größer als 4 ist.

Aufgabe 26

In einer Fabrik werden die hergestellten Teile von einer Kontrolleurin überprüft, die jedes Teil mit einer Wahrscheinlichkeit von $97\,\%$ richtig beurteilt.

a) Ab welcher Anzahl von untersuchten Teilen ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kontrolleurin mindestens eines davon falsch beurteilt, größer als $99{,}9\,\%$?

b) Bei einer anderen Kontrolleurin liegt die Wahrscheinlichkeit, von 100 untersuchten Teilen mindestens drei falsch zu beurteilen, bei etwa $75\,\%$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beurteilt diese Kontrolleurin ein von ihr untersuchtes Teil falsch?
(Ergebnis in Prozent, auf eine Dezimale gerundet).

Aufgabe 27

In einer Urne sind 400 schwarze und 600 weiße Kugeln.

a) Aus dieser Urne werden nacheinander 5 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

A: Die fünf Kugeln haben dieselbe Farbe.

B: Es sind mehr schwarze als weiße Kugeln.

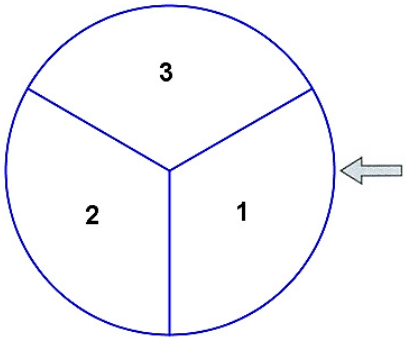
C: Die Kugel, die im vierten Zug gezogen wird, ist mindestens die dritte weiße Kugel.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) Nun wird 100 –mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl der gezogenen schwarzen Kugeln um höchstens 5 vom Erwartungswert abweicht?

Aufgabe 28

Bei dem abgebildeten Glücksrad sind die Mittelpunktswinkel der Kreisausschnitte gleich groß. Das Glücksrad wird mehrfach gedreht und nach jeder Drehung wird die Zahl beim Pfeil notiert.



a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei vier Drehungen
- nur bei der letzten Drehung die Zahl 1,
- mindestens einmal die Zahl 1,
- genau zweimal die Zahl 1 und zwar bei direkt aufeinanderfolgenden Drehungen?

b) Das Glücksrad wird n-mal gedreht.
Für ein Ereignis A gilt:

$$P(A) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot b^3$$

Gib geeignete Werte für n, k und b an und beschreibe ein mögliches Ereignis A in Worten.

Lösung A17

Klausuraufschrieb

a) $B_{10;0,4}(X = 6) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}1115 = 11{,}15\,\%$

b) $B_{10;0,4}(X > 6) = 1 - B_{10;0,4}(X \leq 6) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}0548 \approx 5{,}5\,\%$

Lösung A18

Klausuraufschrieb

a) $B_{10;0,3}(X \geq 1) = 1 - B_{10;0,3}(X = 0) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}9718 \approx 97{,}2\,\%$

b) $B_{20;0,3}(X = 8) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}1144 \approx 11{,}4\,\%$

Lösung A19

Klausuraufschrieb

$B_{8;0,1}(X \leq 2) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}9619 \approx 96{,}2\,\%$

Lösung A20

Klausuraufschrieb

$E(X) = \mu = n \cdot p = 36 \cdot \frac{1}{6} = 6$

$B_{36;\frac{1}{6}}(X = 6) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}1759 \approx 17{,}6\,\%$

Lösung A21

Lösungslogik

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl Ausschussartikel an.

Klausuraufschrieb

$B_{100;0,04}(2 \leq X \leq 6) = B_{100;0,04}(6 \leq X) - B_{100;0,04}(X \leq 1) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}8064 \approx 80{,}6\,\%$

Lösung A22

Klausuraufschrieb

a) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen Gewinne an.
$B_{90;0,1}$-verteilt.

$B_{90;0,1}(X \leq 10) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}7125 \approx 71{,}3\,\%$

b) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen Gewinne an.
$B_{100;0,1}$-verteilt.

$B_{100;0,1}(X \geq 16) = 1 - B_{100;0,1}(X \leq 15) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}03989 \approx 4\,\%$

c) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen Gewinne in einem Päckchen an.
$B_{10;0,1}$-verteilt.

$B_{10;0,1}(X = 0) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}3487 \approx 35\,\%$

In $35\,\%$ aller Fälle muss der Veranstalter das Geld zurückzahlen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A23

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gewürfelten Sechser an. Gesucht wird die Anzahl der erforderlichen Würfe, damit die Wahrscheinlichkeit für eine oder mehrere Sechsen zu würfeln $90\,\%$ oder mehr beträgt.

b) Die gleiche Logik wie bei a), nur dieses Mal mit $99\,\%$.

Klausuraufschrieb

a) $B_{n;\frac{1}{6}}(X \geq 1) = 1 - B_{n;\frac{1}{6}}(X = 0) \geq 0{,}9$

$n \overset{\text{GTR}}{=} 13$, denn $1 - B_{13;\frac{1}{6}}(X = 0) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}9065 \approx 90{,}7\,\%$

Lösungsweg ohne GTR:

$1 - B_{n;\frac{1}{6}}(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$1 -\cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}9 \implies \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1$ | ln (oder log)

$n \cdot ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0{,}1)$ | $: ln\left(\frac{5}{6}\right)$

$n \geq \frac{\ln(0{,}1)}{ln\left(\frac{5}{6}\right)} = 12{,}629$ | wegen $ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$ muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden.

Man muss mindestens 13 mal würfeln.

b) $B_{n;\frac{1}{6}}(X \geq 1) = 1 - B_{n;\frac{1}{6}}(X = 0) \geq 0{,}99$

$n \overset{\text{GTR}}{=} 26$, denn $1 - B_{26;\frac{1}{6}}(X = 0) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}99126 \approx 99{,}1\,\%$

Lösungsweg ohne GTR:

$1 - B_{n;\frac{1}{6}}(X = 0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$1 -\cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}99 \implies \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}01$ | ln (oder log)

$n \cdot ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0{,}01)$ | $: ln\left(\frac{5}{6}\right)$

$n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{ln\left(\frac{5}{6}\right)} = 25{,}25$ | wegen $ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$ muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden.

Man muss mindestens 26 mal würfeln.

Lösung A24

Klausuraufschrieb

a) $B_{30;0{,}25}(X = 10) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}0909 \approx 9{,}1\,\%$

b) $B_{30;0{,}25}(X \leq 10) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}8943 \approx 89{,}4\,\%$

c) $B_{30;0{,}25}(X > 5) = 1 - B_{30;0{,}25}(X \leq 5) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}7974 \approx 79{,}7\,\%$

d) $B_{30;0{,}25}(15 \leq X \leq 25) = B_{30;0{,}25}(X \leq 25) - B_{30;0{,}25}(X \leq 14) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}0027 \approx 0{,}3\,\%$

e) $E(X) = \mu = n \cdot p = 30 \cdot 0{,}25 = 7{,}5$

f) $B_{30;0{,}25}(X = k)_{max} \approx 0{,}16624$ für $k = 7$

g) Erforderliche GTR-Eingaben (siehe Grafik unten):
In die Liste L1 ist eine Wertetabelle von 0 bis 30 einzutragen.
Im Listeneditor im Kopf von L2 ist der Befehl $binompdf(30{,}1/6, L1)$ einzugeben. Nach Betätigung von ENTER werden die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten angezeigt.
Nun muss über 2ND STAT PLOT F1 Y= der Plotter eingeschaltet werden wie in der Grafik unten angezeigt.
Das Window ist wie unten angezeigt einzustellen.
Alle **Y**–Speicher müssen leer sein, dann wird durch GRAPH das Histogramm angezeigt.

Lösung A25

Lösungslogik

Bei einem Würfel haben die Augenzahlen größer 4 die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$.

Klausuraufschrieb

A: $B_{18;\frac{1}{3}}(X = 6) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}1963 \approx 19{,}6\,\%$

B: $B_{18;\frac{1}{3}}(X > 4) = 1 - B_{18;\frac{1}{3}}(X \leq 4) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}7689 \approx 76{,}9\,\%$

C: $B_{18;\frac{1}{3}}(4 \leq X \leq 7) = B_{18;\frac{1}{3}}(X \leq 7) - B_{18;\frac{1}{3}}(X \leq 3) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}6751 \approx 67{,}5\,\%$

Lösung A26

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Teile, die falsch beurteilt werden.
Gesucht wird der Stichprobenumfang für den gilt:
$B_{n;0{,}03}(X \geq 1) > 0{,}999$.

b) Gesucht wird die Prozentzahl falsch beurteilter Teile der Kontrolleurin für den Stichprobenumfang $n = 100$ für den gilt:
$B_{100;p}(X \geq 3) \approx 0{,}75$.

Klausuraufschrieb

a) $B_{n;0{,}03}(X \geq 1) = 1 - B_{n;0{,}03}(X = 0) > 0{,}999$
$n \overset{\text{GTR}}{=} 227$, denn $1 - B_{227;0{,}03}(X = 0) = 0{,}999006$
Die Kontrolleurin muss mindestens 227 Teile beurteilen.

b) $B_{100;p}(X \geq 3) = 1 - B_{100;p}(X \leq 2) \approx 0{,}75$
$p \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}0388$, denn $1 - B_{100;0{,}0388}(X \leq 2) = 0{,}7495$
Die Kontrolleurin beurteilt ein von ihr untersuchtes Teil mit einer Wahrscheinlichkeit von $3{,}9\,\%$ falsch.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A27

Lösungslogik

Die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel beträgt $\frac{600}{1000} = 0{,}6$.

a) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl gezogener weißer Kugeln an, für die gilt:
$B_{5;0,6}(X = 5)$.
Für Ereignis C: gilt:
In den ersten drei Zügen müssen mindestens zwei weiße Kugeln gezogen worden sein. Im vierten Zug muss eine weiße Kugel gezogen werden.

b) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl gezogener schwarzer Kugeln an mit einem Stichprobenumfang von $n = 100$ und einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}4$.
Bei $\mu = n \cdot p$ ist dann die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln zwischen 35 und 45 liegt.

Klausuraufschrieb

a) A: $B_{5;0,6}(X = 5) \overset{GTR}{=} 0{,}07776 \approx 18\,\%$

B: $B_{5;0,6}(X \leq 2) \overset{GTR}{=} 0{,}31744 \approx 31{,}7\,\%$

C: $B_{3;0,6}(X \geq 2) = 1 - B_{3;0,6}(X \leq 1) \overset{GTR}{=} 0{,}648$
Weiße Kugel im vierten Zug:
$B_{3;0,6}(X \geq 2) \cdot 0{,}6 = 0{,}648 \cdot 0{,}6 = 0{,}3888$

b) $E(X) = \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}4 = 40$

$B_{100;0,4}(35 \leq X \leq 45) = B_{100;0,4}(X \leq 45) - B_{100;0,4}(X \leq 34) \overset{GTR}{=} 0{,}7386$

Lösung A28

Lösungslogik

a) Binomialverteilte Ereignisse mit $P(1) = \frac{1}{3}$ und $P(\overline{1}) = \frac{2}{3}$
nur letzte Drehung die Zahl 1:
- Dann muss vorher dreimal keine 1 gedreht worden sein.

Mindestens einmal die Zahl 1:
Das Gegenereignis ist viermal keine 1.
Genau zweimal die Zahl und zwar bei direkt aufeinanderfolgenden Drehungen:
Aufstellung des Ereignisraums und Berechnung der Wahrscheinlichkeit.

b) Identifizierung der Variablen n, k und b.

Klausuraufschrieb

a) $P(1) = \frac{1}{3}$; $P(\overline{1}) = \frac{2}{3}$

- $P(nur\ letzte\ Drehung\ die\ Zahl\ 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$
- $P(mindestens\ einmal\ die\ Zahl\ 1) = 1 - P(\overline{1}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{49}{81}$

Genau zweimal die Zahl 1 und zwar bei direkt aufeinanderfolgenden Drehungen:
- Ereignisraum: $E = \{(11\overline{11}); (\overline{1}11\overline{1}); (\overline{11}11)\}$
  $P(E) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$

b) $n = 8;\ k = 5;\ b = \frac{2}{3}$

Das Glücksrad wird achtmal gedreht und die Zahl beim Pfeil notiert. $P(A)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 5–mal eine 1 (oder eine 2 oder eine 3) auftritt.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe 1

Stelle die Wahrscheinlichkeiten so um, damit eine Berechnung mit dem GTR bzw. WTR möglich wäre.

a) $P(X \geq 5)$ b) $P(X > 14)$ c) $P(X < 12)$
d) $P(3 \leq X \leq 10)$ e) $P(3 < X < 10)$

Aufgabe 2

Herr Maier muss jeden Morgen auf dem Weg zur Arbeit einen Bahnübergang passieren. Die Schranke ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $25\,\%$ geschossen.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Müller innerhalb eines Monats (mit 22 Arbeitstagen)

a) genau fünfmal warten muss
b) höchstens fünfmal warten muss
c) mindestens achtmal warten muss
d) weniger als sechsmal warten muss
e) mehr als zehnmal warten muss
f) nie warten muss
g) mindestens fünf und höchstens zwölfmal warten muss
h) weniger als fünfzehnmal und mehr als sechsmal warten muss

Aufgabe 3

In einer Urne befinden sich 12 schwarze und 4 weiße Kugeln. Es werden 12 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der schwarzen Kugeln.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau fünf schwarze Kugeln gezogen werden.
b) Berechne $\mu = E(X)$ (Erwartungswert von X) und interpretiere diesen Wert.
c) Berechne $P(X = \mu)$ und $P(\mu - 1 \leq X \leq \mu + 1)$.

Aufgabe 4

a) Ein Hersteller von Gummibärchen produziert $28\,\%$ rote Bärchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Tüte mit 143 Gummibärchen mindestens 40 rote sind?
b) Ein Hersteller von Gummibärchen produziert $28\,\%$ rote Bärchen. Marlene entnimmt mit geschlossenen Augen aus einem großen Behälter (der sehr viele Gummibärchen enthält) ein Gummibärchen nach dem anderen. Wie viele muss sie entnehmen, damit sie mit mindestens $85\,\%$ Wahrscheinlichkeit mindestens vier rote Bärchen bekommt?
c) Ein Hersteller von Gummibärchen verkauft diese in Tüten zu 143 Stück. Wie hoch muss der Anteil der roten Gummibärchen in der Produktion sein, damit in einer Tüte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $80\,\%$ mindestens 40 Rote sind?

Aufgabe 5

In einer Vogelkolonie auf einer Nordseeinsel leben 8000 Möwen. Ein Wissenschaftlerteam fängt 100 von ihnen und versieht jeden mit einem Markierungsring.

a) Ein halbes Jahr später werden wiederum 100 Vögel dieser Kolonie gefangen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens fünf von ihnen einen Ring?

b) Wie viele Vögel muss man fangen, um mit mindestens $80\,\%$ Wahrscheinlichkeit mindestens fünf mit Ring zu erhalten?

c) Wie viele Vögel hätte das Wissenschaftsteam mit einem Ring versehen müssen, damit unter 200 Vögeln mit mindestens $80\,\%$ Wahrscheinlichkeit mindestens fünf mit Ring sind?

Aufgabe 6

In einem Unternehmen werden Sauerkirschen maschinell entsteint und dann in Gläser abgefüllt. $1{,}5\,\%$ der fertigen Kirschen haben trotzdem noch ihren Kern.

a) Herr Becker backt einen Kirschkuchen. Dafür nimmt er 120 dieser Kirschen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in dem Kuchen mindestens ein Kirschkern befindet?

b) Wie viele Kirschkerne sind in einem solchen Kuchen zu erwarten?

c) Wie viele Kirschen dürfte Herr Becker für seinen Kuchen höchstens nehmen, damit er mit mindestens $80\,\%$ Wahrscheinlichkeit keinen Kern darin hat?

d) Wie groß darf die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kirsche noch ihren Kern hat, sein, damit sich mit mindestens $80\,\%$ Wahrscheinlichkeit in einem Kirschkuchen mit 120 Kirschen kein Kirschkern befindet?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Klausuraufschrieb

a) $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$ b) $P(X > 14) = 1 - P(X \leq 14)$

c) $P(X < 12) = P(X \leq 11)$ d) $P(2 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 1)$

e) $P(3 < X < 10) = P(X \leq 9) - P(X \leq 3)$

Lösung A2

Lösungslogik

Es handelt sich um eine Binomialverteilung mit $n = 22$ (Arbeitstage/Monat) und $p = 0{,}25$ für Bahnübergang geschlossen.

Klausuraufschrieb

$B_{22;0,25}$-verteilt.

a) $B_{22;0,25}(X = 5) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}1933$ b) $B_{22;0,25}(X \leq 5) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}5168$

c) $B_{22;0,25}(X \geq 8) = 1 - B_{22;0,25}(X \leq 7) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}1615$

d) $B_{22;0,25}(X < 6) = B_{22;0,25}(X \leq 5) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}5168$

e) $B_{22;0,25}(X > 10) = 1 - B_{22;0,25}(X \leq 10) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}01$

f) $B_{22;0,25}(X = 0) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}0018$

g) $B_{22;0,25}(5 \leq X \leq 12) = B_{22;0,25}(X \leq 12) - B_{22;0,25}(X \leq 4) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}6758$

h) $B_{22;0,25}(6 < X < 15) = B_{22;0,25}(X \leq 14) - B_{22;0,25}(X \leq 6) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}3006$

Lösung A3

Lösungslogik

Es handelt sich um eine Binomialverteilung mit $n = 12$ (Anzahl Ziehungen) und $p = \frac{12}{16} = 0{,}75$ für schwarze Kugeln. Der Erwartungswert $E(X)$ in der Binomialverteilung berechnet sich über $\mu = n \cdot p$.

Klausuraufschrieb

$B_{12;0,75}$-verteilt.

a) $B_{12;0,75}(X = 5) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}0115$

b) $\mu = n \cdot p = 12 \cdot 0{,}75 = 9$

c) $B_{12;0,75}(X = 9) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}2581$

$B_{12;0,75}(8 \leq X \leq 10) = B_{12;0,75}(X \leq 10) - B_{12;0,75}(X \leq 7) = 0{,}684$

Lösung A4

Lösungslogik

Es handelt sich um eine Binomialverteilung mit $p = 0{,}28$ für rote Gummibärchen.

a) Gesucht ist für $n = 143$ die Wahrscheinlichkeit für $X \geq 40$.

b) Gesucht ist für $X \geq 4$ der Stichprobenumfang n, sodass $B_{n;0,28}(X \geq 4) \geq 0{,}85$ ist.

c) Gesucht ist für den Stichprobenumfang $n = 143$ und $X \geq 40$ der Wert von p, sodass gilt $B_{143;p}(X \geq 40) \geq 0{,}8$.

Klausuraufschrieb

a) $B_{143;0,28}$-verteilt.

$B_{143;0,28}(X \geq 40) = 1 - B_{143;0,28}(X \leq 39) \overset{GTR}{\approx} 0{,}535$

b) $B_{n;0,28}(X \geq 4) = 1 - B_{n;0,28}(X \leq 3) \geq 0{,}85$

GTR-Einstellungen:

Y1$=1 - binomcdf(X, 0.28{,}3)$

$n \overset{GTR}{=} 20$ da $1 - B_{20;0,28}(X \leq 3) \overset{GTR}{\approx} 0{,}853$

c) $B_{143;p}(X \geq 40) = 1 - B_{143;p}(X \geq 39) \geq 0{,}8$

GTR-Einstellungen:

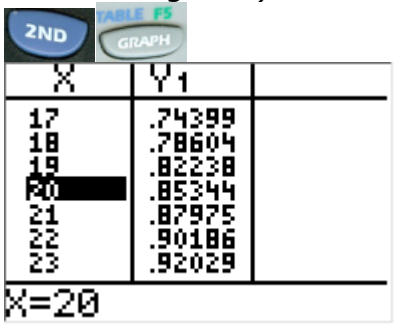
Y1$=1 - binomcdf(143, X, 39)$

Y2$=0{,}8$

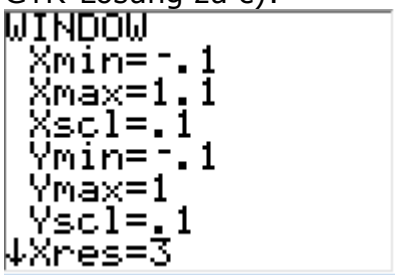
$p \overset{GTR}{\approx} 0{,}3089$

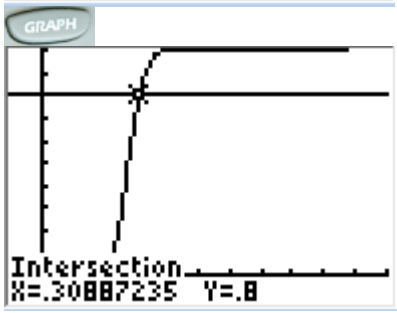
Der Prozentsatz für rote Gummibärchen müsste mindestens etwa $31\,\%$ betragen.

GTR-Lösung zu b):



GTR-Lösung zu c):





Lösung A5

Lösungslogik

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der mit einem Ring markierten Vögel an.

a) Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0{,}0125$. Gesucht die Wahrscheinlichkeit für $X \geq 5$.

b) Gesucht ist der Stichprobenumfang n, der erforderlich ist, um mit mindestens $80\,\%$ Wahrscheinlichkeit 5 beringte Vögel oder mehr zu fangen.

c) Gesucht ist für den Stichprobenumfang $n = 200$ und $X \geq 5$ der Wert von p, sodass gilt $B_{200;p}(X \geq 4) \geq 0{,}8$.

Klausuraufschrieb

a) $B_{100;0,0125}$-verteilt.

$B_{100;0,0125}(X \geq 5) = 1 - B_{100;0,0125}(X \leq 4) \overset{GTR}{\approx} 0{,}0035$

b) $B_{n;0,0125}(X \geq 5) = 1 - B_{n;0,0125}(X \leq 4) \geq 0{,}8$

GTR-Einstellungen:

Y1$=1 - binomcdf(X, 0.0125{,}4)$

$n \overset{GTR}{=} 537$ da $1 - B_{537;0,0125}(X \leq 4) \overset{GTR}{\approx} 0{,}80088$

c) $B_{200;p}(X \geq 5) = 1 - B_{200;p}(X \leq 4) \geq 0{,}8$

GTR-Einstellungen:

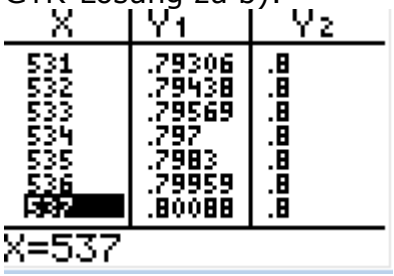
Y1$=1 - binomcdf(200, X, 4)$

Y2$=0{,}8$

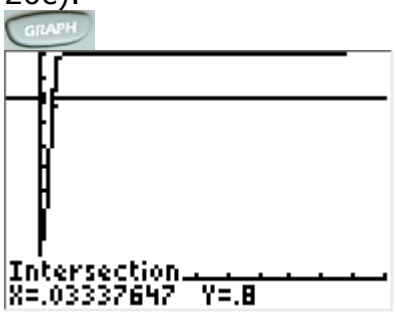
$p \overset{GTR}{\approx} 0{,}0338$

Der Prozentsatz für beringte Vögel müsste mindestens etwa $3{,}4\,\%$ betragen, somit hätten $8000 \cdot 0{,}034 = 272$ Vögel beringt werden müssen.

GTR-Lösung zu b):



GTR-Lösung zu c):
(Window wie in Aufgabe 20c).



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A6

Lösungslogik

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Kirschen mit einem Kirschkern an.

a) Binomialverteilung mit $n = 120$ und $p = 0{,}015$.
Gesucht die Wahrscheinlichkeit für $X \geq 1$.

b) Gesucht ist der Erwartungswert der Binomialverteilung mit $\mu = n \cdot p$.

c) Gesucht ist der Stichprobenumfang n, der erforderlich ist, um mit mindestens $80\,\%$ Wahrscheinlichkeit keine Kirsche mit Kirschkern zu entnehmen. Da X die Anzahl der Kirschen mit einem Kirschkern angibt, ist für diese Aufgaben $X = 0$ zu setzen.

d) Gesucht ist für den Stichprobenumfang $n = 120$ und $X = 0$ der Wert von p, sodass gilt $B_{120;p}(X = 0) \geq 0{,}8$.

Klausuraufschrieb

a) $B_{120;0{,}015}$-verteilt.

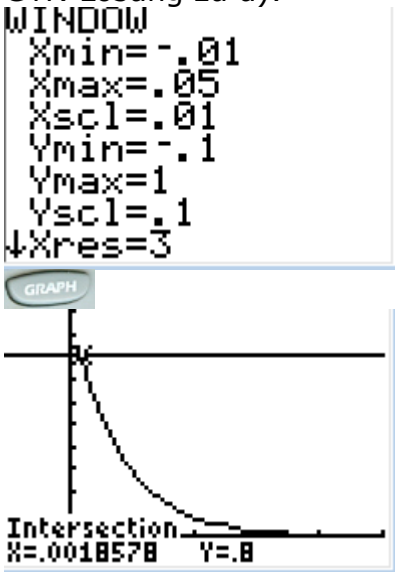
$B_{120;0{,}015}(X \geq 1) = 1 - B_{120;0{,}015}(X = 0) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}8369$

b) $\mu = n \cdot p = 120 \cdot 0{,}015 = 1{,}8$ Kirschen mit Kern

c) $B_{n;0{,}015}(X = 0) \geq 0{,}8$
GTR-Einstellungen:
Y1$=binompdf(X, 0.015{,}0)$
$n \overset{\text{GTR}}{=} 14$ da $B_{n;0{,}015}(X = 0) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}8093$

d) $B_{120;p}(X = 0) \geq 0{,}8$
GTR-Einstellungen:
Y1$=binompdf(120, X, 0)$
Y2$=0{,}8$
$p \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}00186$
Der Prozentsatz für Kirschen mit Kern dürfte höchstens etwa $0{,}17\,\%$ betragen.

GTR-Lösung zu d):



Aufgabe 7

Stelle zunächst die Bernoulliformel auf und berechne dann mit dem GTR, mit welcher Wahrscheinlichkeit man bei einer Bernoulli-Kette der Länge $n = 20$ und der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}3$

a) fünf Treffer,
b) höchstens drei Treffer,
c) weniger als acht Treffer,
d) mindestens zehn Treffer,
e) mehr als 15 Treffer,
f) mindestens 8 und höchstens 12 Treffer

erhält.

Aufgabe 8

Ein Hersteller von Schrauben behauptet, dass mindestens $98\,\%$ der Schrauben normgerechte Längen haben. Ein Händler kontrolliert eine Schraubenlieferung mit einer Stichprobe vom Umfang 200 und findet k Schrauben mit nicht normgerechter Länge.

Die Lieferung soll zurückgewiesen werden, wenn die Wahrscheinlichkeit für mindestens k nicht normgerechte Schrauben in der Stichprobe höchstens $5\,\%$ beträgt.

Ab welcher Anzahl k sollte er die Lieferung zurückweisen?

Aufgabe 9

Eine Glühlampe, die zufällig der Produktion entnommen wird, leuchtet einwandfrei mit der unbekannten Wahrscheinlichkeit p.

Jemand entnimmt zufällig 40 Glühlampen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $90\,\%$ sollen mindestens 38 Glühlampen dieser Stichprobe einwandfrei sein.

Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit p mindestens sein?

Aufgabe 10

Ein Zahnarzt weiß, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Patienten Karies zu diagnostizieren, etwa $p = 0{,}8$ beträgt.

Wie viele Karteikarten muss man der Patientenkartei zufällig entnehmen, wenn dabei mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\,\%$ drei oder mehr Patienten mit Kariesbefund sein sollen?

Aufgabe 11

Statistische Untersuchungen ergaben, dass bei einer Produktion von Computerchips $1\,\%$ fehlerbehaftet sind.

a) Wie viele Chips muss man mindestens überprüfen, damit die Wahrscheinlichkeit, darunter mindestens einen defekten Chip zu finden, größer als $90\,\%$ ist?

b) Aufgrund eines Gerätefehlers erhöht sich der Anteil der fehlerhaften Chips in der Produktion. Die Wahrscheinlichkeit, unter 50 untersuchten Chips mindestens zwei defekte zu finden, liegt jetzt bei etwa $80\,\%$.

Bestimme den Anteil der defekten Chips in dieser Produktion. (Ergebnis in Prozent, auf eine Dezimale gerundet)

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe 12

Ein Großhändler bezieht von zwei Herstellern A und B Energiesparlampen, die äußerlich nicht zu unterscheiden sind. Erfahrungsgemäß sind $9{,}6\,\%$ der Lampen von Hersteller A und $4{,}6\,\%$ der Lampen von Hersteller B defekt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in einer Packung mit 10 Lampen von Hersteller A alle intakt?

b) Bei einer Inventur stellt der Großhändler fest, dass $6\,\%$ aller Lampen defekt sind. Berechnen Sie die Anteile der Hersteller A und B an den gelieferten Lampen.

Aufgabe 13

Ein Medikament heilt eine bestimmte Krankheit mit einer Wahrscheinlichkeit von $85\,\%$. Eine Gruppe von 100 erkrankten Patienten erhält das Medikament.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden

- höchstens 80,
- mindestens 40 und höchstens 90,
- mindestens 85

Patienten dieser Gruppe geheilt?
Wie groß darf eine Gruppe höchstens sein, damit mit mindestens $50\,\%$ Wahrscheinlichkeit alle Patienten der Gruppe geheilt werden?

Aufgabe 14

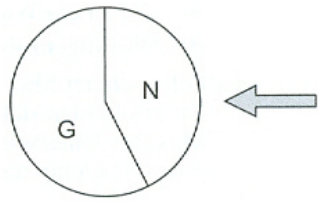
Eine Firma stellt Speicherchips her, die mit der Wahrscheinlichkeit p intakt sind. Man geht nach Erfahrungswerten von $p = 0{,}95$ aus.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Packung mit 50 Chips mehr als einen defekten Speicherchip?

b) Nach einer Optimierung der Produktion versichert die Firma, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $60\,\%$ in einer Packung mit 50 Chips alle intakt sind. Wie groß ist p dann mindestens?

Aufgabe 15

Ein Glücksrad hat die Felder G und N. Das Feld G erscheint mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}6$ und das Feld N mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}4$. Bei einem Spiel wird das Glücksrad fünfmal gedreht. Man gewinnt, wenn dabei mindestens viermal G erscheint.



a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p, dass man bei diesem Spiel gewinnt.

b) Max spielt dieses Spiel 20-mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er dabei mindestens 6 Spiele?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er beim 20. Spiel zum sechsten Mal gewinnt?

Lösung A7

Klausuraufschrieb

a) $B_{20;0,3}(X=5)=\binom{20}{5}\cdot 0{,}3^5\cdot 0{,}7^{15}\overset{\text{GTR}}{\approx}0{,}1789$

b) $B_{20;0,3}(X\le 3)=\binom{20}{0}\cdot 0{,}3^0\cdot 20^{20}+\binom{20}{1}\cdot 0{,}3^1\cdot 20^{19}+\binom{20}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 20^{18}$
$+\binom{20}{3}\cdot 0{,}3^3\cdot 20^{17}\overset{\text{GTR}}{\approx}0{,}107$

c) $B_{20;0,3}(X<8)=\binom{20}{0}\cdot 0{,}3^0\cdot 20^{20}+\binom{20}{1}\cdot 0{,}3^1\cdot 20^{19}+\binom{20}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 20^{18}$
$+\binom{20}{3}\cdot 0{,}3^3\cdot 20^{17}+\binom{20}{4}\cdot 0{,}3^4\cdot 20^{16}+\binom{20}{5}\cdot 0{,}3^5\cdot 20^{15}$
$+\binom{20}{6}\cdot 0{,}3^6\cdot 20^{14}+\binom{20}{7}\cdot 0{,}3^7\cdot 20^{13}\overset{\text{GTR}}{\approx}0{,}7723$

d) $B_{20;0,3}(X\ge 10)=1-B_{20;0,3}(X\le 9)\overset{\text{GTR}}{\approx}0{,}048$

e) $B_{20;0,3}(X>15)=1-B_{20;0,3}(X\le 15)\overset{\text{GTR}}{\approx}0{,}00000555$

f) $B_{20;0,3}(8\le X\le 12)=B_{20;0,3}(X\le 12)-B_{20;0,3}(X\le 7)\overset{\text{GTR}}{\approx}0{,}2264$

Lösung A8

Lösungslogik

Es handelt sich um eine Binomialverteilung mit $n=200$ Schrauben und $p=0{,}02$ für nicht normgerechte Schrauben. Gesucht ist der Wert der Zufallsvariablen $X\ge k$ für die gilt: $B_{200;0,02}(X\ge k)=\le 0{,}05$.

Hinweis:

Aus dem Text der Aufgabe heraus musst du erkennen, dass $p\ne 0{,}98$ sondern $p=1-0{,}98=0{,}02$ ist, da ja nach **nicht** normgerechten Schrauben gefragt ist.

Klausuraufschrieb

$B_{200;0,02}$-verteilt.

$B_{200;0,02}(X\ge k)=1-B_{200;0,02}(X\le k-1)\le 0{,}05\overset{\text{GTR}}{=}k=8$

Die Lieferung sollte zurückgewiesen werden, wenn mehr als 7 Schrauben nicht normgerecht sind.

Lösung A9

Lösungslogik

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl fehlerfreier Glühlampen an. Gesucht ist der Prozentsatz p einwandfreier Glühlampen, für den bei einem Stichprobenumfang $n=40$ $k=38$ oder mehr einwandfreie Glühlampen eine Wahrscheinlichkeit von $90\,\%$ und mehr ergeben.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

$B_{40;p}$-verteilt.

$B_{40;p}(X \geq 38) = 1 - B_{40;p}(X \leq 37) \geq 0{,}9$

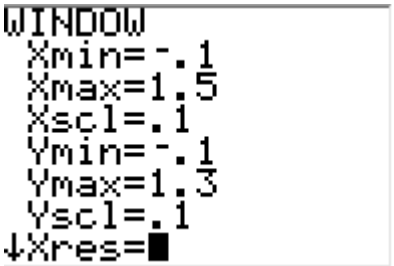
GTR-Einstellungen:

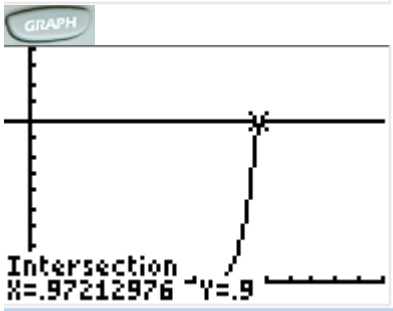
Y1$=1 - binomcdf(40, X, 37)$

Y2$=0{,}9$

$p \overset{GTR}{\approx} 0{,}972$ da $B_{40;0{,}972}(X \geq 38) \geq 0{,}9$

Der Prozentsatz einwandfreier Glühlampen der Gesamtproduktion müsste mindestens etwa $97{,}2\,\%$ betragen.





Lösung A10

Lösungslogik

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Patienten mit Karies an. Gesucht ist der Stichprobenumfang n, für den 3 oder mehr Karteikarten von Kariespatienten bei $p = 0{,}8$ für Karieserkrankung eine Wahrscheinlichkeit von $95\,\%$ und mehr ergeben.

Klausuraufschrieb

$B_{n;0{,}8}$-verteilt.

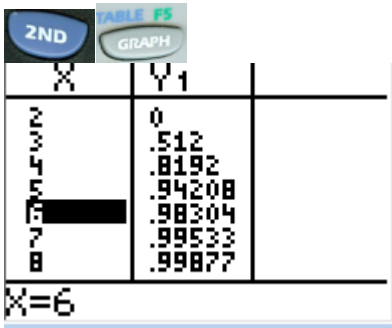
$B_{n;0{,}8}(X \geq 3) = 1 - B_{n;0{,}8}(X \leq 2) \geq 0{,}95$

GTR-Einstellungen:

Y1$=1 - binomcdf(X, 0.8, 2)$

$n \overset{GTR}{=} 6$ da $B_{6;0{,}8}(X \geq 3) \approx 0{,}9834$

Es müssen Patientenkarten der Kartei entnommen werden.



Lösung A11

Lösungslogik

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der der defekten Chips.

a) Gesucht ist der Stichprobenumfang n, für den 1 oder mehr defekte Chips bei $p = 0{,}1$ für defekte Chips eine Wahrscheinlichkeit von $90\,\%$ und mehr ergeben.

b) Gesucht ist der Prozentsatz p defekter Chips an der Gesamtproduktion, für die bei einem Stichprobenumfang $n = 50$ $k = 2$ oder mehr defekte Chips eine Wahrscheinlichkeit von etwa $80\,\%$ sich ergibt.

Klausuraufschrieb

$B_{50;p}$-verteilt.

$B_{50;p}(X \geq 2) = 1 - B_{50;p}(X \leq 2) \approx 0{,}8$

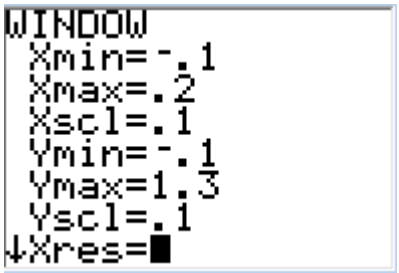
GTR-Einstellungen:

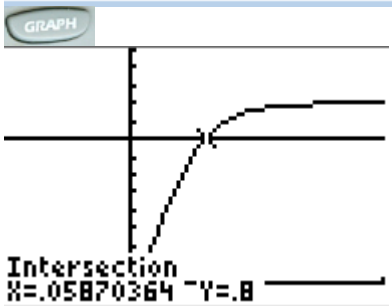
Y1$=1 - binomcdf(50, X, 1)$

Y2$=0{,}8$

$p \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}0587$ da $B_{50;0{,}0587}(X \geq 2) = 0{,}8$

Der Prozentsatz defekter Chips an der Gesamtproduktion darf etwa $5{,}9\,\%$ nicht übersteigen.





Lösung A12

Lösungslogik

a) Es handelt sich um eine Bernoullikette mit $B_{10;0{,}096}$-Verteilung.

b) Sei x der Prozentsatz der von Hersteller A gelieferten defekten Lampen, dann ist $1 - x$ der Prozentsatz der von Hersteller B gelieferten defekten Lampen. Danach hat Hersteller A $0{,}096 \cdot x$ und Hersteller B $0{,}046 \cdot (1 - x)$ defekte Lampen geliefert. In der Summe sollen diese nach Aufgabenstellung $6\,\%$ sein.

Klausuraufschrieb

a) $B_{10;0{,}096}$-verteilt mit :

$$p = P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}096^0 \cdot (1 - 0{,}096)^{10} \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}3645$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $36{,}5\,\%$ sind in einer 10–er Packung von Hersteller A alle Lampen intakt.

b) Sei x der Prozentsatz der von Hersteller A gelieferten defekten Lampen. Dann gilt:

Defekte Lampen von A: $0{,}096 \cdot x$

Defekte Lampen von B: $0{,}046 \cdot (1 - x)$

Defekte Lampen insgesamt: $6\,\% = 0{,}06$

$0{,}096 \cdot x + 0{,}046 \cdot (1 - x) = 0{,}06$

$0{,}05 \cdot x = 0{,}014 \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}28$

$28\,\%$ der gelieferten Lampen stammen von Hersteller A, $72\,\%$ von Hersteller B.

Lösung A13

Lösungslogik

Die Zufallsvariable X ist $B_{100;0{,}85}$-verteilt.

Höchstens 80 entspricht $P(X \leq 80)$.

Mindestens 40 und höchstens 90 entspricht $P(40 \leq X \leq 90)$.

Mindestens 85 entspricht $P(X \geq 85)$.

Bei „Wie groß darf die Gruppe höchstens sein" ist n gesucht. Alle Patienten bedeutet dabei $B_{n;0{,}85}(X = k)$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

X ist $B_{100;0,85}$-verteilt.

$B_{100;0,85}(X \leq 80) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}1065 \approx 10{,}7\,\%$

Mit ca. $10{,}7\,\%$ *Wahrscheinlichkeit werden höchstens* 80 *von* 100 *Patienten geheilt.*

$B_{100;0,85}(40 \leq X \leq 90) = P(X \leq 90) - P(X \leq 39) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}9449 \approx 94{,}5\,\%$

Mit ca. $94{,}5\,\%$ *Wahrscheinlichkeit werden mindestens* 40 *und höchstens* 90 *von* 100 *Patienten geheilt.*

$B_{100;0,85}(X \geq 85) = 1 - B_{100;0,85}(X \leq 84) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}5683 \approx 56{,}8\,\%$

Mit ca. $56{,}8\,\%$ *Wahrscheinlichkeit werden mindestens* 85 *von* 100 *Patienten geheilt.*

Größe der Gruppe:

X ist $B_{n;0,85}$-verteilt.

$B_{n;0,85}(X = k) \geq 0{,}5 \quad \Longrightarrow$

$n \overset{\text{GTR}}{=} 4$ denn $B_{4;0,85}(X = 4) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}5220$

Die Gruppe darf höchstens 4 *Patienten umfassen, damit mit mindestens* $50\,\%$ *Wahrscheinlichkeit alle geheilt werden.*

Lösung A14

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X für defekte Chips ist $B_{50;0,05}$-verteilt.

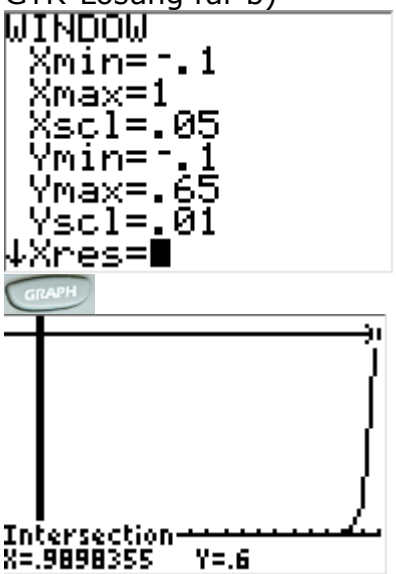
b) Die Zufallsvariable X für intakte Chips ist $B_{50;p}$-verteilt.

GTR-Einstellungen

Y1: $binompdf(50, X, 50)$

Y2: $0{,}6$

GTR-Lösung für b)



Klausuraufschrieb

a) X für defekte Chips ist $B_{50;0,05}$-verteilt.

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}7206 \approx 72{,}1\,\%$

Mit ca. $72{,}1\,\%$ *Wahrscheinlichkeit enthält eine Packung mehr als einen defekten Chip.*

b) X für intakte Chips ist $B_{50;p}$-verteilt.

$B_{50;p}(X = 50) \geq 0{,}6 \quad \Longrightarrow \quad p \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}9898355$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Speicherchip aus der Gesamtproduktion intakt ist, beträgt jetzt mindestens ca. $99\,\%$.

Lösung A15

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X für Gewinn ist $B_{5;0,6}$-verteilt.

b) Die Zufallsvariable X für Gewinn ist $B_{20;p_a}$-verteilt.

Im 20. Spiel das sechste Mal gewinnen, bedeutet, dass in den vorigen 19 Spielen fünf Mal gewonnen werden musste. Die Wahrscheinlichkeit für $X = 5$ muss also noch einmal mit der Wahrscheinlichkeit für Gewinn multipliziert werden.

Klausuraufschrieb

a) $X \geq 4$ für Gewinn ist $B_{5;0,6}$-verteilt.

$B_{5;0,6}(X \geq 4) = 1 - B_{5;0,6}(X \leq 3) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}33696 \approx 33{,}7\,\%$

Die Gewinnwahrscheinlichkeit bei diesem Spiel beträgt etwa $33{,}7\,\%$.

b) $X \geq 6$ für Gewinn ist $B_{20;0,337}$-verteilt.

$B_{20;0,337}(X \geq 6) = 1 - B_{20;0,337}(X \leq 5) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}7147 \approx 71{,}5\,\%$

Mit ca. $71{,}5\,\%$ *Wahrscheinlichkeit gewinnt Max mindestens* 6 *von* 20 *Spielen.*

Im $20.$ *Spiel das sechste Mal gewinnen:*

$X = 5$ für 5 Mal Gewinn in den ersten 19 Spielen ist $B_{19;0,337}$-verteilt.

$p = B_{19;0,337}(X = 5) \cdot 0{,}337 \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}054 \approx 5{,}4\,\%$

Mit etwa $5{,}4\,\%$ *Wahrscheinlichkeit gewinnt Max im* $20.$ *Spiel das sechste Mal.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe 16

Zwei Maschinen M_1 und M_2 stellen die gleiche Sorte Schrauben her. Erfahrungsgemäß sind $1\,\%$ der von Maschine M_1 produzierten Schrauben fehlerhaft. Bei Maschine M_2 sind es $5\,\%$.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
   A: "Von 100 Schrauben aus der Maschine M_1 sind höchstens zwei fehlerhaft",
   B: "Von 200 Schrauben aus der Maschine M_2 sind mehr als 180, aber höchstens 190 einwandfrei".

b) Die Schrauben werden in Beutel zu jeweils 500 Stück verpackt und mit einem Aufkleber versehen, auf dem die Maschine vermerkt ist, die sie produziert hat. Gelegentlich fallen diese Aufkleber beim Transport der Beutel ab. In diesem Fall werden einem solchen Beutel 50 Schrauben entnommen und überprüft. Bei höchstens einer fehlerhaften Schraube wird der Beutel der Maschine M_1, ansonsten der Maschine M_2 zugeordnet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dabei ein Beutel mit Schrauben, die von der Maschine M_1 produziert wurden, falsch zugeordnet?

Aufgabe 17

Bei einem Glücksrad beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Hauptgewinn bei einer Drehung $10\,\%$.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 10 Drehungen des Rades
   - genau einen Hauptgewinn,
   - mindestens zwei Hauptgewinne

   erhält.

b) Wie oft muss das Glücksrad mindestens gedreht werden, damit man mit mindestens $80\,\%$ Wahrscheinlichkeit zwei oder mehr Hauptgewinne erhält?

Aufgabe 18

Ein Betrieb stellt Infrarotsensoren her, wobei erfahrungsgemäß $10\,\%$ der Sensoren defekt sind. Die Sensoren werden in Packungen zu 50 Stück ausgeliefert.

a) Ein Abnehmer überprüft eine Packung. Wenn er mehr als fünf defekte Sensoren darin findet, will er die Lieferung zurückschicken.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies der Fall?

b) Der Betrieb verspricht, alle Packungen zurückzunehmen, die mehr als k defekte Sensoren enthalten. Bestimme die kleinste Zahl k, für die die Wahrscheinlichkeit einer Rücksendung bei $3\,\%$ liegt.

Eine Firma verwendet die Infrarotsensoren ungeprüft zur Herstellung von Bewegungsmeldern. In einen Bewegungsmelder werden drei Sensoren verbaut. Damit er funktioniert, müssen mindestens zwei Sensoren intakt sein.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert ein Bewegungsmelder?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit p darf ein Sensor höchstens defekt sein, damit ein Bewegungsmelder mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $90\,\%$ funktioniert?
   Bestimme p auf die zweite Nachkommastelle gerundet.

Aufgabe 19

Bei einer Fluggesellschaft ist aus langjähriger Erfahrung bekannt, dass ein Kunde mit einer Wahrscheinlichkeit von $5\,\%$ seinen gebuchten Flug nicht antritt.

a) Die Fluggesellschaft setzt für eine bestimmte Strecke eine kleine Maschine mit 70 Sitzplätzen ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 70 Buchungen tatsächlich alle Sitzplätze belegt sind?
Die Fluggesellschaft überbucht die Maschine und verkauft 72 Flugtickets. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann dies dazu führen, dass nicht alle Passagiere mitfliegen können?

b) Eine größere Maschine der Fluggesellschaft hat 300 Sitzplätze. Wie viele Tickets darf die Gesellschaft maximal verkaufen, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 300 Personen den Flug antreten wollen, weniger als $3\,\%$ betragen soll?

Aufgabe 20

Ein Ferienhotel hat 260 Zimmer, die in der Hauptsaison jeweils für eine Woche gebucht werden können. Der Hotelbesitzer weiß aus Erfahrung, dass im Mittel nur $90\,\%$ der Buchungen in Anspruch genommen werden. Der Rest wird kurzfristig storniert. Die Anzahl der Buchungen, die tatsächlich in Anspruch genommen werden, wird durch die Zufallsvariable X beschrieben.

a) Beschreibe, unter welcher Annahme man die Wahrscheinlichkeitsverteilung von mit einer Binomialverteilung modellieren kann.
Beschreibe eine reale Situation, die gegen die Annahme spricht.

b) Der Hotelbesitzer nimmt genauso viele Buchungen pro Woche an, wie Zimmer vorhanden sind.
Mit welcher durchschnittlichen Anzahl an belegten Zimmern kann der Hotelbesitzer in einer Woche rechnen?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mindestens diese Anzahl von Zimmern belegt?

c) Um das Hotel möglichst gut auszulasten, erwägt der Hotelbesitzer 290 Buchungen pro Woche anzunehmen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dann das Hotel zwei Wochen in Folge überbucht ist?
Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall soll weniger als $0{,}5\,\%$ betragen.
Wie viele Buchungen pro Woche darf der Hotelbesitzer dann höchstens annehmen?

Aufgabe 21

Für Kühlaggregate werden Pumpen verwendet, die das Kühlmittel transportieren. Eine Pumpe fällt in einem bestimmten Zeitraum mit der Wahrscheinlichkeit p aus. Das Kühlaggregat A besitzt nur eine Pumpe, das Aggregat B vier Pumpen. Die Pumpen in B arbeiten unabhängig voneinander und es darf höchstens eine Pumpe ausfallen, damit das Kühlaggregat B noch funktioniert.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallt das Kühlaggregat B aus, wenn $p = 0{,}1$ gilt?

b) Stellen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit von B als Funktion von p dar. Für welche Werte von p ist die Ausfallwahrscheinlichkeit von Aggregat B geringer als die von Aggregat A?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A16

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X_{M1} ist $B_{100;0,01}$ –verteilt.
Die Zufallsvariable X_{M2} ist $B_{200;0,05}$ –verteilt.

b) Die Zufallsvariable X_{M1} ist $B_{50;0,01}$ –verteilt, gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer Stichprobe mehr als eine fehlerhafte Schraube befindet $P(X_{M1} > 1)$.

Klausuraufschrieb

a) X_{M1} ist $B_{100;0,01}$ –verteilt, X_{M2} ist $B_{200;0,05}$ –verteilt.

$P(A) = P(X_{M1} \leq 2) \overset{GTR}{\approx} 0{,}9206 \approx 92{,}1\,\%$

$P(B) = P(10 \leq X_{M2} \leq 20) = P(X_{M2} \leq 20) - P(X_{M2} \leq 9) \overset{GTR}{\approx} 0{,}5441 \approx 54{,}4\,\%$

b) X_{M1} ist $B_{50;0,01}$ –verteilt.

$B_{50;0,01}(X_{M1} > 1) = 1 - B_{50;0,01}(X_{M1} \leq 1) \overset{GTR}{\approx} 0{,}0894 \approx 8{,}9\,\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $8{,}9\,\%$ *wird der Beutel falsch zugeordnet.*

Lösung A17

Lösungslogik

Binomialverteilung mit $p_{Haupt} = 0{,}1$ und $p_{\overline{Haupt}} = 0{,}9$

Klausuraufschrieb

a) A: „Bei 10 Drehungen genau ein Hauptgewinn."
B: „Bei 10 Drehungen mindestens zwei Hauptgewinne."

$P(A) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^9 \overset{GTR}{\approx} 0{,}3874$

$P(B) = P(X \geq 2)01 - P(X \leq 1) \overset{GTR}{\approx} 0{,}2639$

b) Gesucht ist n.

$B_{n;0,1}(X \geq 2) = 1 - B_{n;0,1}(X \leq 1) \geq 0{,}8$

$n \overset{GTR}{=} 29$

Man muss das Glücksrad mindestens 29*–mal drehen.*

Lösung A18

Lösungslogik

Teil a) und b): Binomialverteilung mit $p_{gut} = 0{,}9;\ p_{\overline{gut}} = 0{,}1;\ n = 50$

Teil c) und d): Binomialverteilung mit $p_{gut} = 0{,}9;\ p_{\overline{gut}} = 0{,}1;\ n = 3$

Klausuraufschrieb

a) $B_{50;0,1}(X \geq 5) = 1 - B_{50;0,1}(X \leq 4) \overset{GTR}{\approx} 0{,}5688$

Der Abnehmer wird mit etwa $57\,\%$ *Wahrscheinlichkeit die Lieferung zurückschicken.*

b) $B_{50;0,1}(X \geq k) = 1 - (x \leq k - 1) \leq 0{,}03$

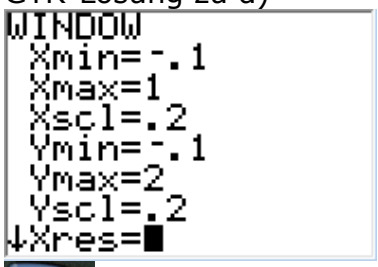
$k \overset{GTR}{=} 10$

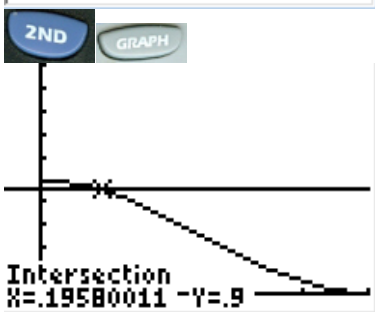
Die kleinste Zahl ist $k = 10$.

c) $B_{3;0,9}(X \geq 2) = 1 - B_{3;0,9}(X \leq 1) \overset{GTR}{\approx} 0{,}972$
Ein Bewegungsmelder funktioniert mit etwa $97\,\%$ *Wahrscheinlichkeit.*

d) GTR-Einstellungen:
Y1: $binomcdf(3, X, 1)$
$B_{3;p}(X \leq 1) \leq 0{,}1$
$p \overset{GTR}{\approx} 0{,}1958$
Ein Sensor darf höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von $19{,}6\,\%$ *defekt sein.*

GTR-Lösung zu d)





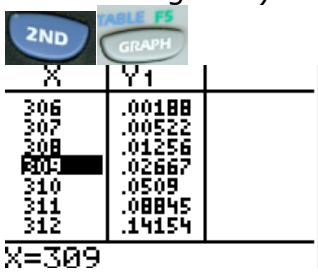
Lösung A19

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X bei 70 Plätzen ist $B_{70;0,05}$ –verteilt.
Die Zufallsvariable X bei 72 Buchungen ist $B_{72;0,95}$ –verteilt. Wenn mehr als 70 Passagiere erscheinen, können nicht alle Passagiere mitfliegen.

b) Die Zufallsvariable X ist $B_{n;0,95}$–verteilt. Gesucht ist n für $P(X > 300) \leq 0{,}03$.
GTR-Einstellungen
Y1:$1 - binomcdf(X, .95, 300)$

GTR-Lösung zu b)



Klausuraufschrieb

a) X_{P70} ist $B_{70;0,05}$ –verteilt, X_{P72} ist $B_{72;0,95}$ –verteilt.
Alle Sitzplätze bei 70 Buchungen:
$B_{70;0,05}(X_{P70} = 0) \overset{GTR}{\approx} 0{,}027589 \approx 2{,}6\%$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $2{,}6\%$ *sind alle Plätze belegt.*
Überbuchung bei 72 Flugtickets:
$B_{72;0,95}(X)_{P72} > 70) = 1 - B_{72;0,95}(X_{P72} \leq 70) \overset{GTR}{\approx} 0{,}11923 \approx 11{,}9\%$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $11{,}9\,\%$ *können nicht alle Passagiere mitfliegen.*

b) X ist $B_{n;0,95}$ –verteilt. Gesucht: $B_{n;0,95}(X > 300) \leq 0{,}03$
$B_{n;0,95}(X > 300) = 1 - B_{n;0,95}(X \leq 300) \leq 0{,}03 \quad \Rightarrow \quad n \overset{GTR}{=} 309$
Die Fluggesellschaft darf maximal 309 *Tickets verkaufen, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als* 300 *Personen den Flug antreten wollen unter* $3\,\%$ *liegen soll.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A20

Lösungslogik

b) Der Erwartungswert X der Binomialverteilung ist $\mu = n \cdot p$.
Gesucht wird weiterhin $B_{260;0,9}(X > \mu)$.

c) Jetzt gilt $B_{290;0,9}$ –verteilt.
Es soll dann gelten:. $B_{290;0,9}(X > 260) < 0{,}005$

Klausuraufschrieb

a) Die Annahme einer Binomialverteilung ist gerechtfertigt, da es nur zwei Elementarereignisse mit immer derselben Wahrscheinlichkeit gibt, nämlich „in Anspruch genommene Buchungen" und „stornierte Buchungen".
Eine reale Situation, die dagegen spricht, wären z. B. plötzlich eintretende Naturereignisse wie etwa Dauerregen, Sturmwarnungen u. ä., die den Anteil der kurzfristigen Stornierungen ansteigen lassen würden.

b) $E(X) = \mu = n \cdot p = 260 \cdot 0{,}9 = 234$
Der Hotelbesitzer kann im Durchschnitt mit 234 belegten Zimmern pro Woche rechnen.

$B_{260;0,9}(X > 234) = 1 - B_{260;0,9}(X \leq 234) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}4698$
Die Anzahl von mindestens 234 Zimmern wird mit etwa $47\,\%$ Wahrscheinlichkeit belegt.

c) Es gilt jetzt $B_{290;0,9}$ –Verteilung. Eine Überbuchung pro Woche entsteht dann, wenn mehr als 260 Personen ihre Buchung in Anspruch nehmen.

$B_{290;0,9}(X > 260) = 1 - B_{290;0,9}(X \leq 260) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}5492$
Die Wahrscheinlichkeit der Überbuchung zwei Wochen in Folge ist dann
$P(\text{Überbuchung zwei Wochen in Folge}) = 0{,}5492^2 = 0{,}3017$
Die Wahrscheinlichkeit, dass das Hotel zwei Wochen in Folge überbucht ist beträgt etwa $30\,\%$.
$B_{n;0,9}(X > 260) = 1 - B_{n;0,9}(X \leq 260) \leq 0{,}05$
$\overset{\text{GTR}}{n} = 276$
Der Hotelbesitzer darf höchstens 276 *Buchungen annehmen.*

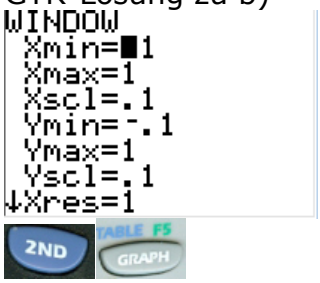
Lösung A21

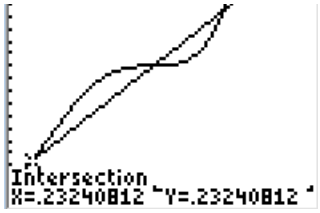
Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X_B ist $B_{4;0,1}$ –verteilt.

b) Die Zufallsvariable X_B ist $B_{4;p}$–verteilt. Gesucht ist p für $P(X \geq 2)$. Die Ausfallwahrscheinlichkeit von Aggregat A ist gleich p, da nur eine Pumpe verwendet wird.
GTR-Einstellungen
Y1:$1 - (1 - X)^4 - 4X(1 - X)$^3
Y2:X

GTR-Lösung zu b)





Klausuraufschrieb

a) X_B ist $B_{4;0,1}$ –verteilt.

$B_{4;0,1}(X_B \geq 2) = 1 - B_{4;0,1}(X_B \leq 1) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}0523 \approx 5{,}2\%$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $5{,}2\%$ *fällt das Kühlaggregat* B *aus.*

b) X_B ist $B_{4;p}$–verteilt. Gesucht ist $B_{4;p}(X_B \geq 2) = 1 - B_{4;p}(X_B \leq 1)$ als Funktion von p.

$$\begin{aligned} 1 - B_{4;p}(X_B \leq 1) &= 1 - B_{4;p}(X_B = 0) - B_{4;p}(X_B = 1) \\ &= 1 - \binom{4}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^4 - \binom{4}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^3 \\ &= 1 - (1-p)^4 - 4 \cdot p \cdot (1-p)^3 \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung für die Ausfallwahrscheinlichkeit von B in Abhängigkeit von p ist somit $f_B(p) = 1 - (1-p)^4 - 4 \cdot p \cdot (1-p)^3$.
Die Ausfallwahrscheinlichkeit von A ist gleich p, da nur eine Pumpe verwendet wird. Die Funktionsgleichung für die Ausfallwahrscheinlichkeit von A in Abhängigkeit von p ist somit $f_A(p) = p$.

$f_A(p) \cap f_B(p) \quad \Longrightarrow \quad p_0 \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}2324$
$f_B(p) < f_A(p)$ im Intervall $[0; 0{,}2324[$.
Für $p < 0{,}2324$ ist die Ausfallwahrscheinlichkeit von Aggregat B kleiner als die von Aggregat A.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe 1

In einer Prüfung muss ein Kandidat 60 Fragen beantworten. Zu jeder Frage werden 5 Antworten angeboten, von denen nur eine richtig ist. Es darf jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

a) Zum Bestehen der Prüfung müssen mehr als 15 Fragen richtig beantwortet werden. Ein ahnungsloser Prüfling kreuzt bei jeder Frage zufällig eine Antwort an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er die Prüfung?

b) Die zum Bestehen notwendige Anzahl richtiger Antworten soll neu festgelegt werden. Bei zufälligem Ankreuzen der Antworten soll die Wahrscheinlichkeit für ein Bestehen der Prüfung höchstens $3\,\%$ betragen. Wie viele richtige Antworten müssen dazu mindestens verlangt werden?

Aufgabe 2

Ein Hersteller von Fliesen hat erfahrungsgemäß $10\,\%$ Ausschuss. Ein Großabnehmer einigt sich mit dem Hersteller auf folgende Abnahmeregel:
Eine Sendung geht sofort zurück, wenn in einer Stichprobe von 20 Fliesen mehr als 4 Fliesen beschädigt sind. Sind 3 oder 4 Fliesen beschädigt, so wird eine zweite Stichprobe vom Umfang 50 entnommen. Sind in dieser mehr als 5 Fliesen beschädigt, wird die Sendung endgültig zurückgegeben.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss der Hersteller mit einer Rücksendung der Fliesen rechnen?

b) Der Hersteller will das Risiko einer Rücknahme senken. Dazu soll die Regel bei der zweiten Stichprobe bezüglich der Anzahl der beschädigten Fliesen abgeändert werden.
Wie muss die Änderung aussehen, damit die Wahrscheinlichkeit für eine Rücksendung unter $6\,\%$ liegt?

Aufgabe 3

a) In der Bundesrepublik Deutschland besitzen $43\,\%$ aller Personen die Blutgruppe A. 50 Personen werden zufällig ausgewählt.
Begründe, dass die Anzahl der Personen mit Blutgruppe A in dieser Gruppe mit einer binomialverteilten Zufallsvariablen beschrieben werden kann.
Bestimme jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
E: „In dieser Gruppe haben genau 20 Personen die Blutgruppe A."
F: „In dieser Gruppe haben mehr als 25 Personen die Blutgruppe A."

b) Bei einem Medikament für eine bestimmte Krankheit geht man davon aus, dass es bei Patienten mit Blutgruppe A in $90\,\%$, bei Patienten mit Blutgruppe B in $70\,\%$ aller Fälle zur Heilung führt. Zehn Patienten werden mit diesem Medikament behandelt. Acht von ihnen haben Blutgruppe A, zwei die Blutgruppe B.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden
- alle zehn Patienten
- mindestens neun Patienten

geheilt.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe 4

Die Polizei plant für das Spiel der beiden Fußballvereine Rot-Weiß Klein-Krotzenburg (RWK) und TuS Recklinghausen (TuS) einen Einsatz.
Sie geht davon aus, dass $48\,\%$ der Zuschauer Fans vom RWK und $30\,\%$ vom TuS sind. Keiner der Fans ist Fan von beiden Vereinen. Die restlichen Zuschauer werden als neutral eingestuft.

Die Polizei weiß aus Erfahrung, dass $15\,\%$ aller Zuschauer Alkohol bei sich haben, unter den RWK-Fans sind es sogar $20\,\%$ und unter den TuS-Fans nur $10\,\%$.

a) Die Polizei kontrolliert vor dem Stadion vier zufällig ausgewählte Personen aus einer Gruppe von RWK-Fans. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   A: Mindestens eine Person hat Alkohol dabei.
   B: Genau zwei Personen haben Alkohol dabei.
   C: Höchstens eine Person hat keinen Alkohol dabei.

b) Wie viel Prozent der neutralen Zuschauer haben Alkohol bei sich?
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von allen Personen, die Alkohol dabei haben, eine zufällig ausgewählte Person ein TuS-Fan ist?

c) Der Einsatzleiter möchte wissen, wie viele Personen mindestens in einer Gruppe von TuS-Fans kontrolliert werden müssen, um mit mehr als $60\,\%$ Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Personen mit Alkohol zu erwischen.
   Der Sohn des Einsatzleiters meint, die kleinste natürliche Zahl n, die die Ungleichung
   $$0{,}6 < 1 - (0{,}9^n + 0{,}9^{n-1} \cdot 0{,}1)$$
   erfüllt, sei die gesuchte Personenzahl.
   Begründen Sie, warum dieser Ansatz falsch ist.

Aufgabe 5

Auf einem Glücksrad sind 40 gleich große Sektoren vorhanden. Jeder Sektor ist mit einer der Zahlen 0, 1, 2, 3 beschriftet. Die Zahlen sind mit folgenden absoluten Häufigkeiten vertreten:

Zahl	0	1	2	3
Absolute Häufigkeit	20	10	6	4

Das Glücksrad wird gedreht und zufällig gestoppt. Ein fest stehender Pfeil zeigt dann auf einen der Sektoren. Die Zahl im Sektor wird abgelesen und notiert.

a) Dieser Vorgang wird genau viermal durchgeführt.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
   A: Die Zahlen 0, 1, 2, 3 werden in dieser Reihenfolge abgelesen.
   B: Alle vier Zahlen treten je einmal auf.
   C: Die 3 tritt mindestens zweimal auf.
   D: Die Summe der vier Zahlen ist größer als 10.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Ein Veranstalter bietet folgendes Spiel an: Ein Spieler darf das Glücksrad bis zu viermal drehen. Ziel ist es, eine möglichst hohe Zahl zu erreichen. Sobald der Spieler mit der Zahl zufrieden ist, kann er aufhören. Wenn er aber noch einmal dreht, wird die zuvor erreichte Zahl verworfen.

Der Veranstalter beobachtet, dass viele Spieler folgende Strategie anwenden:

"Spiele nur so lange, bis mindestens der Zahlenwert 2 auftritt und beende dann sofort das Spiel!"

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler mit dieser Strategie seine vier Versuche ausschöpft und nicht vorher aufhört ?

c) Welchen Zahlenwert erreicht ein Spieler mit dieser Strategie im Durchschnitt?

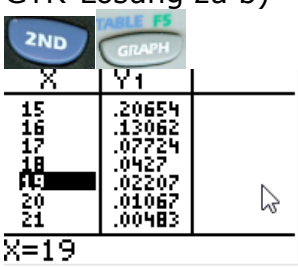
Lösung A1

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X für die Anzahl richtig beantworteter Fragen ist $B_{60;0,2}$ –verteilt.

b) Die Zufallsvariable X für die Anzahl richtig beantworteter Fragen ist $B_{60;0,2}$ –verteilt, gesucht wird k für $B_{60;0,2}(X \geq k) \leq 0{,}03$.
GTR-Einstellungen
Y1: $1 - binomcdf(60, .2, X - 1)$

GTR-Lösung zu b)



Klausuraufschrieb

a) X für die Anzahl richtig beantworteter Fragen ist $B_{60;0,2}$ –verteilt.

$B_{60;0,2}(X \geq 16) = 1 - B_{60;0,2}(X \leq 15) \overset{GTR}{\approx} 0{,}1306 \approx 13{,}1\,\%$

Mit ca. $13{,}1\,\%$. Wahrscheinlichkeit besteht der ahnungslose Prüfling die Prüfung.

b) X ist nach wie vor $B_{60;0,2}$ –verteilt. Gesucht ist k für $B_{60;0,2}(X \geq k) \leq 0{,}03$.

$B_{60;0,2}(X \geq k) = 1 - B_{60;0,2}(X \leq k - 1) \leq 0{,}03$

$k \overset{GTR}{=} 19$

Es müssen mindestens 19 *richtige Antworten zum Bestehen der Prüfung verlangt werden.*

Lösung A2

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der beschädigten Fliesen unter 20 Stück an. Die Zufallsvariable Y gibt die Anzahl der beschädigten Fliesen unter 50 Stück an. X ist $B_{20;0,1}$–verteilt, Y ist $B_{50;0,1}$–verteilt. Die Rücksendung erfolgt, wenn

I.) $B_{20;0,1}(X \geq 5)$ ist und im Falle $B_{20;0,1}(3 \leq X \leq 4)$ dass

II.) $B_{50;0,1}(Y \geq 6) \cdot B_{20;0,1}(3 \leq X \leq 4)$.

b) Gesucht ist k von Y für $B_{20;0,1}(X \geq 5) + B_{50;0,1}(Y \geq k) \cdot B_{20;0,1}(3 \leq X \leq 4) < 0{,}06$.
GTR-Einstellungen
Y1: $1 - binomcdf(20, .1, 4) + \big(1 - binomcdf(50, .1, X - 1)\big) *$
$\big(binomcdf(20, .1, 4) - binomcdf(20, .1, 2)\big)$

Klausuraufschrieb

a) X gibt die Anzahl beschädigter Fliesen unter 20 an und ist $B_{20;0,1}$–verteilt.
Y gibt die Anzahl beschädigter Fliesen unter 50 an und ist $B_{50;0,1}$–verteilt.

$$p_R = B_{20;0,1}(X \geq 5) + B_{20;0,1}(3 \leq X \leq 4) \cdot B_{50;0,1}(Y \geq 6)$$
$$= 1 - B_{20;0,1}(X \leq 4) + \big(1 - B_{50;0,1}(Y \leq 5)\big) \cdot \big(B_{20;0,1}(X \leq 4) - B_{20;0,1}(X \leq 2)\big)$$

$p_R \overset{GTR}{\approx} 0{,}1506 \approx 15\,\%$

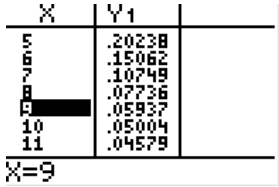
Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $15\,\%$ *muss der Hersteller mit einer Rücksendung rechnen.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) $1 - B_{20;0,1}(X \leq 4) + \left(1 - B_{50;0,1}(Y \leq k-1)\right) \cdot \left(B_{20;0,1}(X \leq 4) - B_{20;0,1}(X \leq 2)\right) < 0{,}06$

$k \overset{\text{GTR}}{=} 9$

In der zweiten Stichprobe müssen jetzt für eine Rücknahme der Sendung mehr als 8 *defekte Fliesen gefordert werden.*



X	Y1
5	.20238
6	.15062
7	.10749
8	.07736
9	.05937
10	.05004
11	.04579

X=9

Lösung A3

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Personen mit Blutgruppe A an und ist $B_{50;0,43}$–verteilt.

b) Aufstellung der Einzelereignisse und Berechnung der Wahrscheinlichkeiten.

Klausuraufschrieb

a) Die Anzahl der Personen in der Gruppe kann deshalb mit einer binomialverteilten Zufallsvariablen beschrieben werden, weil sich der genannte Prozentsatz von $43\,\%$ auf die gesamte Bevölkerung der BRD bezieht und empirisch erhoben wurde. Damit hat jede Untermenge von der Gesamtmenge dieselbe Wahrscheinlichkeit.

$P(E) = B_{50;0,43}(X = 20) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}1044$

$P(F) = B_{50;0,43}(X > 25) = 1 - B_{50;0,43}(X \leq 25) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}1269$

In der Gruppe haben etwa $10{,}4\,\%$ *genau die Blutgruppe* A*.*

Die Wahrscheinlichkeit für mehr als 25 *Personen mit Blutgruppe* A *beträgt etwa* $12{,}7\,\%$*.*

b) Die Zufallsvariable Y gibt die Anzahl der geheilten Patienten der Blutgruppe A, sie ist $B_{8;0,9}$-vertelt. Die Zufallsvariable Z die Anzahl der geheilten Patienten der Blutgruppe B an, sie ist $B_{2;0,7}$-verteilt.

G: „Alle zehn Patienten werden geheilt."

$P(G) = B_{8;0,9}(Y = 8) \cdot B_{2;0,7}(X = 2) = 0{,}9^8 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}2109 \approx 21{,}1\,\%$

H: „Mindestens neun Patienten werden geheilt."

Der Ereignisraum ist $\Omega = \{(8Y; 2Z); (8Y; 1Z); (7Y; 2Z)\}$

$P(H) = P(G) + B_{8;0,9}(Y = 8) \cdot B_{2;0,7}(X = 1) + B_{8;0,9}(Y = 7) \cdot B_{2;0,7}(X = 2)$

$P(H) = 0{,}2109 + \binom{8}{8} 0{,}9^8 \cdot \binom{2}{1} \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + \binom{8}{7} \cdot 0{,}9^7 \cdot 0{,}1 \cdot \binom{2}{2} \cdot 0{,}7^2$

$= 0{,}2109 + 0{,}9^8 \cdot 2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}9^7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}5792 \approx 57{,}92\,\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Personen geheilt werden beträgt etwa $21\,\%$*.*

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 9 *Patienten geheilt werden, beträgt etwa* $58\,\%$*.*

Lösung A4

a) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl kontrollierter RWK-Fans, die Alkohol dabei haben, an und ist $B_{4;0,20}$–verteilt.

$P(A) = B_{4;0,2}(X \geq 1) = 1 - B_{4;0,2}(X = 0) \overset{GTR}{\approx} 0{,}5904 \approx 59\,\%$

$P(B) = B_{4;0,2}(X = 2) = \overset{GTR}{\approx} 0{,}1536 \approx 15{,}4\,\%$

Es ist nach „keinem Alkohol" gefragt, damit ist X $B_{4;0,8}$-verteilt.

$P(C) = B_{4;0,8}(X \leq 1) = \overset{GTR}{\approx} 0{,}0272 \approx 2{,}7\,\%$

b) Aufstellung einer stochastischen Matrix:

	Mit Alkohol	Ohne Alkohol	Summe
Neutral	$0{,}024$	$0{,}196$	$0{,}22$
TuS-Fan	$0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$	$0{,}27$	$0{,}30$
RWK-Fan	$0{,}2 \cdot 0{,}48 = 0{,}096$	$0{,}384$	$0{,}48$
Summe	$0{,}15$	$0{,}85$	$1{,}0$

In der Aufgabenstellung verbirgt sich implizit die Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit. Exakter formuliert wäre „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zufällig ausgewählte Person Alkohol dabei hat unter der Bedingung, dass sie eine neutrale Person ist." Hierfür gilt:

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ mit A: „Die Person ist eine neutrale Person" und B: „Die Person hat Alkohol dabei". Damit ergibt sich:

$P_A(B) = \frac{0{,}024}{0{,}22} = 0{,}1090 = 10{,}9\,\%$

Ähnliches gilt für die Formulierung „…dass von allen Personen, die Alkohol dabei haben, eine zufällig ausgewählte Person ein TuS-Fan ist". Exakter formuliert wäre „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zufällig ausgewählte Person ein TuS-Fan ist unter der Bedingung, dass sie Alkohol dabei hat." Hierfür gilt ebenfalls:

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ mit A: „Die Person hat Alkohol dabei" und B: „Die Person ist TuS-Fan". Damit ergibt sich:

$P_A(B) = \frac{0{,}03}{0{,}15} = 0{,}2 = 20\,\%$

c) D: „Mindestens zwei Fans der TuS-Gruppe, die Alkohol dabei haben."

$P(D) = B_{n;0,1}(X \geq 2) = 1 - B_{n;0,2}(X \leq 1) > 0{,}6$

$1 - B_{n;0,2}(X \leq 1) = 1 - \left(\binom{n}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^n + \binom{n}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{n-1}\right) > 0{,}6$

$1 - (0{,}9^n + n \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{n-1}) = 1 - (0{,}9^n - 0{,}1 \cdot n \cdot 0{,}9^{n-1}) > 0{,}6$

$0{,}6 < 1 - (0{,}9^n - 0{,}1 \cdot n \cdot 0{,}9^{n-1}) \neq 1 - (0{,}9^n - 0{,}9^{n-1} \cdot 0{,}1)$

Begründung:

In der gegebenen Ungleichung wurde die Auflösung des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{1} = n$ vergessen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A5

Klausuraufschrieb

a) Aufstellung einer stochastischen Matrix:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{20}{40} = 0{,}5$	$\frac{10}{40} = 0{,}25$	$\frac{6}{40} = 0{,}15$	$\frac{4}{40} = 0{,}1$

$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}1 = 0{,}001875 \approx 0{,}2\ \%$

$P(B) = 4! \cdot P(A) = 24 \cdot 0{,}001875 = 0{,}045 = 4{,}5\ \%$

Für $P(C)$ formen wir um in ein Bernoulli-Experiment mit $P(X = 3) = \frac{1}{10}$ und $P(X = \overline{3}) = \frac{9}{10}$.

$$P(C) = B_{4,01}(X \geq 2) = 1 - B_{4,01}(X \leq 1) = 1 - \left(\binom{4}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 + \binom{4}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3\right)$$

$$= 1 - (0{,}9^4 + 4 \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3) = 1 - 0{,}9477 = 0{,}0523 = 5{,}23\ \%$$

Ereignisraum von D:

$\Omega = \{(3;3;3;3), (3;3;3;2), (3;3;2;3), (3;2;3;3), (2;3;3;3;)\}$

$P(D) = 0{,}1^4 + 4 \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}15 = 0{,}0007 = 0{,}07\ \%$

b) Der Spieler, der seine vier Versuche ausschöpft, muss somit in den ersten drei Drehungen entweder die 0 oder die 1 erhalten und in der vierten Drehung die 2 oder die 3.

0 oder die 1 haben die Wahrscheinlichkeit 0,75.

$P(4\,Versuche) = 0{,}75^3 = 0{,}4219 \approx 42{,}2\ \%$

Hinweis: Das Ergebnis der vierten Drehung spielt keine Rolle mehr.

c) Gesucht ist der Erwartungswert aus 4 Drehungen.

1. Möglichkeit:

Das Ergebnis "0" wird notiert, wenn in den ersten drei Drehungen 0 oder 1 gedreht wird und in vierten Drehung 0 ist.

$P(Ergebnis = \text{"0"}) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{128}$

2. Möglichkeit:

Das Ergebnis "1" wird notiert, wenn in den ersten drei Drehungen 0 oder 1 gedreht wird und in vierten Drehung 1 ist.

$P(Ergebnis = \text{"1"}) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{256}$

3. Möglichkeit:

Das Ergebnis "2" wird notiert, wenn:

Beim ersten Mal wird 2 gedreht: $\frac{6}{40}$

Zunächst 0 oder 1 dann 2: $\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{40} = \frac{18}{160}$

Zunächst zweimal 0 oder 1 dann 2: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{6}{40} = \frac{27}{320}$

Zunächst dreimal 0 oder 1 dann 2: $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{6}{40} = \frac{81}{1280}$

$P(Ergebnis = \text{"2"}) = \frac{6}{40} + \frac{18}{160} + \frac{27}{320} + \frac{81}{1280} = \frac{105}{256}$

4. Möglichkeit:

Das Ergebnis "3" wird notiert, wenn:

Beim ersten Mal wird 3 gedreht: $\frac{1}{10}$

Zunächst 0 oder 1 dann 3: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{40}$

Zunächst zweimal 0 oder 1 dann 3: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{160}$

Zunächst dreimal 0 oder 1 dann 3: $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{27}{640}$

$P(Ergebnis = \text{"3"}) = \frac{1}{10} + \frac{3}{40} + \frac{9}{160} + \frac{27}{640} = \frac{35}{128}$

Erwarteter Zahlenwert $E(X)$:

$0 \cdot \frac{27}{128} + 1 \cdot \frac{27}{256} + 2 \cdot \frac{105}{256} + 3 \cdot \frac{35}{128} = 1{,}746$

Der Spieler erreicht im Durchschnitt mit dieser Strategie den Zahlenwert $1{,}746$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Dieses Dokument ist noch im Aufbau

Aufgabe A1

Ein Glücksrad hat vier Sektoren, wovon die ersten beiden die Winkelgröße $\alpha = \beta = 60\,°$ haben. Für die Winkelgrößen γ und δ des dritten und vierten Sektors gilt $\gamma = \delta$.

a) Bestimme γ und gib die Wahrscheinlichkeit $P(\gamma)$ an, mit der das Rad so zu stehen kommt, dass der Pfeil in den dritten Sektor zeigt.

b) Bei 3,00 € Einsatz erhält man Auszahlungen gemäß folgender Tabelle:

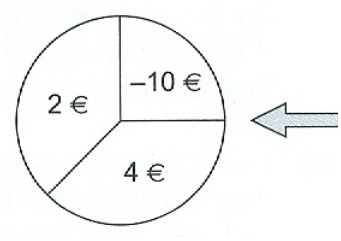
α	β	γ	δ
1,00 €	2,00 €	3,00 €	4,00 €

Bestimme den Gewinnerwartungswert. Entscheide, ob das Spiel fair ist.

Aufgabe A2

Für den Erwartungswert einer Zufallsvariablen X findet man die Formel

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \cdots + x_n P(X = x_n)$$



a) Erkläre die einzelnen Elemente dieser Formel. Welche Aussage macht der Erwartungswert?

b) Erläutere den Erwartungswert an einem Beispiel unter Verwendung des abgebildeten Glücksrades.

Aufgabe A3

Felix will auf einem Fest ein Spiel mit einem Glücksrad anbieten, bei dem das Rad einmal gedreht wird. Um seinen Gewinn zu kalkulieren, führt er folgende Rechnung durch: $3€ \cdot \frac{1}{4} + 1\,€ \cdot \frac{1}{3} - 2\,€ \cdot \frac{1}{6} - 1\,€ \cdot \frac{1}{4} = 0{,}50\,€$

a) Wie könnte das Glücksrad aussehen?

b) Nenne eine mögliche Gewinnregel für die Spieler des Spiels, wenn Felix einen festen Einsatz pro Spiel verlangen will.

Aufgabe A4

Die Zufallsvariable X nimmt die Werte 0, 2, 6 und 10 an. Ihr Erwartungswert ist $E(X) = \frac{23}{6}$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X ist durch die folgende Tabelle gegeben:

x_i	0	2	6	10
$P(X = x_i)$	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	b

Bestimme die Werte für a und b.

Aufgabe A5

In einem Behälter liegen eine rote und vier schwarze Kugeln. Man nimmt so lange ohne Zurücklegen eine Kugel aus dem Behälter, bis die rote Kugel gezogen wird.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man höchstens dreimal ziehen muss?

b) Mit wie vielen Ziehungen muss man durchschnittlich rechnen, bis die rote Kugel gezogen wird?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A6

Zwei ideale Würfel werden gleichzeitig geworfen.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
   A: „Genau ein Würfel zeigt eine 6"
   B: "Die Augenzahlen unterscheiden sich um 4"

b) Felix schlägt Max folgendes Spiel vor:
   Unterscheiden sich die Augenzahlen der beiden Würfel um 4 oder 5, so bekommt Max den Unterschied in Spielchips ausgezahlt. In allen anderen Fällen muss er einen Spielchip an Felix zahlen. Ist das Spiel fair?

Aufgabe A7

Bei einem Glücksspiel wird eine ideale Münze geworfen. Liegt nach einem Wurf Wappen oben, so endet das Spiel. Andernfalls wird die Münze wieder geworfen, jedoch höchstens dreimal.
Als Gewinn erhält man:

1 € bei Wappen im ersten Wurf;
2 € bei Wappen im zweiten Wurf;
4 € bei Wappen im dritten Wurf.

Der Einsatz bei dem Spiel beträgt $1{,}50$ €. Ist das Spiel fair?

Aufgabe A8

Einem Kartenspiel entnimmt man aus jeder der Farben Kreuz, Pik, Herz und Karo die Karten mit den Werten 7, 8, 9 und 10. Mit den entnommenen Karten wird folgendes Spiel gespielt:
Die Karten werden gemischt und ein Spieler zieht zufällig drei Karten. Sind die Karten von gleicher Farbe, erhält er 15 €. Haben die Karten den gleichen Wert, erhält er a €. In allen anderen Fällen muss er 1 € zahlen.
Für welchen Wert für a ist das Spiel fair?

Hinweis

Bei Aufgaben mit dem Erwartungswert wird empfohlen, unmittelbar eine Tabelle der x_i und $P(X = x_i)$ anzulegen.

Lösung A1

Lösungslogik

a) Da α und β jeweils $60\,°$ sind, stehen für γ und δ noch $360\,° - 120° = 240°$ zur Verfügung. Da $\gamma = \delta$ ist somit $\gamma = \frac{240}{2} = 120\,°$. Der dritte Sektor wird vom Winkel γ dargestellt mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$.

b) Es ist der Gewinnerwartungswert zu berechnen. Ist dieser Wert gleich dem Einsatz, so ist das Spiel fair.

Klausuraufschrieb

a) $360\,° - \alpha - \beta = \gamma + \delta$

$\gamma + \delta = 240\,°$

Wegen $\gamma = \delta$ somit $\gamma = \frac{240}{2} = 120\,°$.

$P(dritter\ Sektor) = P(\gamma) = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$

b)

α	β	γ	δ
1,00 €	2,00 €	3,00 €	4,00 €
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$
$\frac{1}{6}$ €	$\frac{2}{6}$ €	$\frac{6}{6}$ €	$\frac{8}{6}$ €

$E(X) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{6}{6} + \frac{8}{6} = \frac{17}{6} \approx 2{,}83$

Wegen $E(X) \neq 3{,}00$ ist das Spiel nicht fair.

Lösung A2

Klausuraufschrieb

a) In der Formel bedeuten die x_i die möglichen Werte der Zufallsvariablen X und $P(X = x_i)$ die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.
Der Erwartungswert $E(X)$ gibt an, welcher Wert durchschnittlich bei einer großen Zahl von Durchführungen des Zufallsexperimentes zu erwarten ist.

b) Man könnte mit dem Glücksrad folgendes Glücksspiel durchführen:
Das Glücksrad wird einmal gedreht. Zeigt der Zeiger auf einen positiven Geldbetrag, so wird dieser dem Spieler ausgezahlt, ansonsten muss er 10 € zahlen.
$P(-10\text{ €}) = \frac{1}{4}$; $P(2\text{ €}) = \frac{3}{8}$; $P(4\text{ €}) = \frac{3}{8}$. Die Zufallsvariable X, die den Gewinn des Spielers beschreibt, hat daher folgende Wahrscheinlichkeits-verteilung:

x_i	2 €	4 €	−10 €
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

Der Erwartungswert von X ist (s. Formel in der Aufgabenstellung):

$E(X) = 2 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} - 10 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

Wird dieses Spiel sehr häufig gespielt, so muss der Spieler mit einem mittleren Verlust von 0,25 € pro Spiel rechnen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A3

Lösungslogik

a) Die Aufgabe beschreibt vier unterschiedliche $P(X = x_i)$, die auf einem Glücksrad verteilt sind. Wir bestimmen damit die Mittelpunktswinkel des Glücksrades.

b) Wir stellen eine Tabelle der x_i und $P(X = x_i)$ auf und wenden die Formel für den Erwartungswert an.

Klausuraufschrieb

a) Das Glücksrad ist in vier Sektoren unterteilt mit jeweils
$\alpha_1 = \frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$; $\alpha_2 = \frac{1}{3} \cdot 360° = 120\,°$; $\alpha_3 = \frac{1}{6} \cdot 360° = 60°$; $\alpha_4 = \frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$

b) Ausgehend vom gegebenen Erwartungswert $E(X) = 0{,}5$ könnte bei einem Spieleinsatz von $3\,€$ folgender „Gewinnplan" aufgestellt werden:
Sektor 1: kein Gewinn
Sektor 2: $2\,€$
Sektor 3: $5\,€$
Sektor 4: $4\,€$
Die Tabelle hat folgendes Aussehen (aufsteigend sortiert):

Gewinnplan (x_i)	$5\,€$	$4\,€$	$2\,€$	$0\,€$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
Auszahlung	$5 \cdot \frac{1}{6}$	$4 \cdot \frac{1}{4}$	$2 \cdot \frac{1}{3}$	$0 \cdot \frac{1}{4}$

$E(X) = \frac{5}{6}€ + 1€ + \frac{2}{3}€ = 2{,}50€$
Felix muss auf lange Sicht gesehen $2{,}50\,€$ auszahlen bei einem Einsatz von $3{,}00\,€$. Sein Gewinn pro Spiel beträgt somit im Durchschnitt $0{,}50\,€$.

Lösung A4

Lösungslogik

Wir wenden die Formel für den Erwartungswert an.

Klausuraufschrieb

$E(X) = \frac{23}{6} = 0 \cdot a + 2 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot b$
$\frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 10b = \frac{23}{6}$
$10b = \frac{23}{6} - \frac{13}{6} = \frac{5}{3}$
$b = \frac{1}{6}$
$a + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$
$a = \frac{1}{4}$
Die gesuchten Werte sind $a = \frac{1}{4}$ *und* $b = \frac{1}{6}$.

Lösung A5

Lösungslogik

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.

a) Das Gegenereignis zu rot spätestens im dritten Zug ist dreimal keine rote Kugel zu ziehen.

b) Die Zufallsvariable X kann die Werte von 1 bis 5 annehmen (5 Kugeln im Behälter).

Klausuraufschrieb

a) A: „Rot spätestens im dritten Zug"
$\overline{A}$: „Nur schwarz in drei Zügen"
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$

b)

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1}$

$E(X) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{5}{5} = \frac{15}{5} = 3$

Durchschnittlich muss man mit 3 Zügen rechnen, bis die rote Kugel gezogen wird.

Lösung A6

Lösungslogik

Bei Würfelexperimenten lohnt es sich, eine Ereignistabelle aufzustellen. Der Ereignisraum für A ist nebenstehend orange markiert, für B darunter ebenfalls in orange. Zusätzliche Felder für Aufgabenteil b) in lila.

b). Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn von Max in Spielchips an. X kann die Werte -1, 4 und 5 annehmen.

Wertigkeit jedes Ereignisses ist $\frac{1}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Klausuraufschrieb

a) $P(A) = 10 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$
$P(B) = 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$

b) X entspricht der Zufallsvariablen für den Gewinn von Max. Die Wahrscheinlichkeiten für X sind:
$P(X = 4) = P(B) = \frac{1}{9}$
$P(X = 5) = \frac{1}{18}$
$P(X = -1) = \frac{5}{6}$
$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{1}{18} + (-1) \cdot \frac{5}{6} = -\frac{1}{9}$
Da der Erwartungswert für den Gewinn von Max nicht null ist, ist das Spiel nicht fair.

Wertigkeit jedes Ereignisses ist $\frac{1}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Lösung A7

Lösungslogik

Berechnung über den Erwartungswert. Ein Spiel ist dann fair, wenn $E(X) = 0$ ist. Wir stellen eine Tabelle auf, wobei in diesem Falle, in dem der Einsatz bekannt ist, die Einzelgewinne um den Einsatz zu reduzieren sind.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

$P(A) = \frac{1}{2}$

x_i	2,50 €	0,5 €	−0,50 €	−1,50 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(X) = 2{,}50 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}50 \cdot \frac{1}{4} + (-0{,}50) \cdot \frac{1}{8} + (-1{,}50) \cdot \frac{1}{8} = 1{,}13\ €$

Wegen $E(X) \neq 0$ ist das Spiel nicht fair. Auf lange Sicht gesehen verliert der Spielebetreiber etwa $1{,}13$ € /Spiel.

Lösung A8

Lösungslogik

Wir bestimmen zunächst die Wahrscheinlichkeiten für drei Karten gleicher Farbe. Es handelt sich um insgesamt 16 Karten, wovon jeweils 4 Karten die gleiche Farbe haben.
Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Die Wahrscheinlichkeit einer einzelnen Kombination beträgt $p = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{1}{140}$. Wegen der vier Kartenfarben also $4 \cdot \frac{1}{140} = \frac{1}{35}$.
Die gleiche Logik gilt für vier Karten desselben Wertes.

Klausuraufschrieb

Anzahl der Karten ist 16 wovon jeweils 4 Karten die gleiche Farbe und jeweils 4 Karten denselben Wert haben.
G: „Drei Karten mit gleichem Wert."
F: „Drei Karten mit gleicher Farbe."

$P(G) = \binom{4}{3} \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = 4 \cdot \frac{1}{140} = \frac{1}{35}$

$P(F) = \binom{4}{3} \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = 4 \cdot \frac{1}{140} = \frac{1}{35}$

Für den Erwartungswert $E(X)$ gilt:
Die Zufallsvariable X kann die Werte $x_1 = 15$ € für dreimal die gleiche Farbe, $x_2 = a$ € für dreimal den gleichen Wert und $x_3 = -1$ € für keines von beidem annehmen. Es gilt:

x_i	15 €	a €	−1,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{33}{35}$

$E(X) = 15 \cdot \frac{1}{35} + a \cdot \frac{1}{35} + (-1) \cdot \frac{33}{35} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 18$

Der Gewinn für drei Karten mit gleichem Wert muss 18 € *betragen, damit das Spiel fair ist.*

Aufgabe A9

Ein Glücksrad besteht aus 3 Feldern, die folgendermaßen beschriftet sind:

1 . Feld: 2,00 €
2 . Feld: 5,00 €
3 . Feld: 0,00 €

Das 1 . Feld hat einen Mittelpunktswinkel von 90 °. Das 2 .Feld und das 3.Feld haben jeweils denselben Mittelpunktswinkel.

Es wird folgendes Glücksspiel angeboten:

Der Spieler zahlt einen Einsatz von 3,00 € und darf einmal an dem Glücksrad drehen.

Die Feldbeschriftungen geben an, wie viel Euro an den Spieler ausbezahlt werden, wenn das Glücksrad auf dem Feld stehen bleibt.

Bestimme den erwarteten Gewinn für den Spieler.

Aufgabe A10

In einer Urne befinden sich Kugeln mit der Aufschrift + 2,00 €, + 5,00 € und − 7,00 €.

Die Wahrscheinlichkeit, dass man Kugeln mit + 2,00 € bzw. + 5,00 € zieht, beträgt jeweils 0,3.

Ein Spieler zieht zweimal hintereinander eine Kugel mit Zurücklegen und notiert jeweils ihre Zahl.

Die Summe dieser beiden Zahlen (unter Berücksichtigung des Vorzeichens) geben an, wie viel Euro der Spieler ausbezahlt bekommt (bei positivem Vorzeichen) bzw. was der Spieler bezahlen muss (bei negativem Vorzeichen).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler bei einem Spiel Geld gewinnt?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler bei fünf Spielen genau dreimal gewinnt.
c) Wie viele Spiele müssen gespielt werden, damit der Spielanbieter mit Einnahmen von ca. 1.000 € rechnen kann?

Aufgabe A11

Aus einem Beutel mit zwölf 50-Cent-Münzen, fünf 1 €-Münzen und acht 2 €-Münzen

werden zufällig zwei Münzen gezogen.

Welchen Geldbetrag wird man bei häufiger Versuchsdurchführung durchschnittlich

herausziehen?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A12

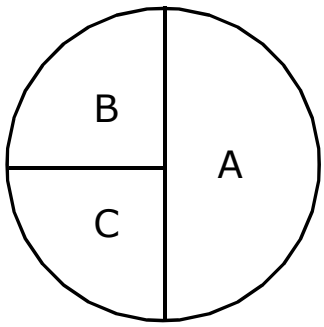
Bei einem Glücksspiel mit dem Einsatz $1\,€$ gibt die Zufallsvariable G den Gewinn (d. h. die Differenz zwischen Auszahlung und Einsatz) in € an.
Die folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von G an.

g in €	-1	0	1	4
$P(G=g)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$

a) Berechne den Erwartungswert von G.
b) Wie groß muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?
c) Ändere die maximale Auszahlung so ab, dass das Spiel bei einem Einsatz von $1\,€$ fair ist.

Aufgabe A13

Bei einer Lotterie zahlt man den Einsatz von $0{,}50\,€$ und darf dann das Glücksrad zweimal drehen. Bei zwei Feldern mit gleicher Bezeichnung wird $1\,€$ ausbezahlt, sonst nichts.



a) Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen "Gewinn in €" an.
b) Berechne den Erwartungswert für den Gewinn.
c) Kann man den Einsatz so ändern, dass die Lotterie fair ist ?

Aufgabe A14

In einem Zeitungsartikel wurde eine Statistik über die Anzahl von Fehlern in Zeitungsartikeln erstellt. Danach sind auf $17\,\%$ der Seiten keine Druckfehler, auf $30\,\%$ der Seiten ist ein Druckfehler, auf $27\,\%$ der Seiten sind zwei, auf $16\,\%$ der Seiten drei und auf dem Rest mindestens vier Druckfehler.
Wie viele Druckfehler sind durchschnittlich mindestens auf einer Zeitungsseite zu erwarten?

Aufgabe A15

In einer Urne sind 4 weiße und 6 schwarze Kugeln. Ein Spieler zieht nacheinander eine
Kugel ohne zurücklegen. Das Spiel ist aus, wenn er eine weiße Kugel zieht oder wenn er dreimal gezogen hat. Die Zufallsvariable X steht für die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
b) Der Spieleinsatz beträgt $10\,€$. Der Spieler erhält $30\,€$, wenn er drei schwarze Kugeln gezogen hat. Er erhält $20\,€$, wenn er zwei schwarze Kugeln zieht. In allen anderen Fällen erhält er nichts. Welchen mittleren Gewinn (oder Verlust) hat der Spieler auf lange Sicht je Spiel zu erwarten? Wie hoch müsste der Spieleinsatz ungefähr sein, damit das Spiel fair ist?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A16

In einer Urne sind 2 blaue, 3 rote und 5 weiße Kugeln. Ein Spieler zieht nacheinander ohne Zurücklegen 3 Kugeln. Der Spieler erhält 6 €, wenn alle drei gezogenen Kugeln dieselbe Farbe haben. Er erhält 2 €, wenn die drei Kugeln unterschiedliche Farben aufweisen. Bei allen anderen Ausgängen muss der Spieler $1{,}50$ € bezahlen.

Wie viel gewinnt oder verliert der Spieler je Spiel im Mittel auf "lange Sicht"?

Aufgabe A17

Mit zwei Urnen und einem Glücksrad wird ein Glücksspiel durchgeführt. Die beiden Urnen $U1$ und $U2$ haben folgende Inhalte:

$U1$: 4 rote, 1 blaue und 5 weiße Kugeln

$U2$: 1 rote und 9 weiße Kugeln

Die Zahlen des Glücksrads treten mit folgender Wahrscheinlichkeit auf:

1	2	3	4	5	6
0,2	0,05	0,35	0,1	0,2	0,1

Das Glücksspiel hat folgende Regeln:

Das Glücksrad wird einmal gedreht. Erscheint eine gerade Zahl, so wird zweimal mit Zurücklegen aus $U2$ gezogen, erscheint eine ungerade Zahl, so wird zweimal mit Zurücklegen aus $U1$ gezogen.

Zieht ein Spieler dabei zwei weiße Kugeln oder keine weiße Kugel, so erhält er 1 €, sonst zahlt er $1{,}50$ €. Prüfe, ob das Spiel fair ist.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A9

Klausuraufschrieb

$P(1.Feld) = \frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$; $P(2.Feld) = \frac{360°-90°}{360°} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$; $P(3.Feld) = \frac{3}{8}$.

$1.Feld$	$2.Feld$	$3.Feld$
2,00 €	5,00 €	0,00 €
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
0,50 €	1,88 €	0 €

$E(X) = 0{,}50\,€ + 1{,}88\,€ + 0\,€ = 2{,}38\,€$

Da der Spieler einen Einsatz von $3{,}00\,€$ leisten muss beträgt der erwartete Gewinn für den Spieler $2{,}38\,€ - 3{,}00\,€ = -0{,}62\,€$.

Der Spieler macht auf lange Sicht gesehen pro Spiel einen Verlust von $0{,}62\,€$.

Lösung A10

Klausuraufschrieb

Ereignisraum:

$E = \{(2;2), (2;5), (5;2), (2;-7), (-7;2); (5;5), (5;-7), (-7;5), (-7;-7)\}$

Wahrscheinlichkeiten:

$P(-7;-7) = P(X = -14) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$

$P(5;5) = P(X = 10) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$

$P(2;2) = P(X = 4) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$

$P\big((5;-7), (-7;5)\big) = P(X = -2) = 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}24$

$P\big((2;-7), (-7;2)\big) = P(X = -5) = 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}24$

$P\big((2;5), (5;2)\big) = P(X = 7) = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$

a) $P(Spieler\ gewinnt) = P(X > 0) = 0{,}09 + 0{,}09 + 0{,}18 = 0{,}36$.
$P(Spieler\ verliert) = 1 - P(Spieler\ gewinnt) = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$

b) Aus a) folgt eine Binomialverteilung mit $n = 5$, $p = 0{,}36$ für Gewinn und $X = 3$ für 3 Gewinne.
$B_{5;0{,}36}(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}36^3 \cdot 0{,}64^2 = 0{,}1911 \approx 19\,\%$

c) *Berechnung des Erwartungswertes* $E(X)$*:*

x_i	10 €	7 €	4 €	−2 €	−5 €	−14 €
$P(X = x_i)$	0,09	0,18	0,09	0,24	0,24	0,16
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,90 €	1,26 €	0,36 €	−0,48 €	−1,20 €	−2,24 €

$E(X) = 0{,}90 + 1{,}26 + 0{,}36 - 0{,}48 - 1{,}20 - 2{,}24 = -1{,}40\,€$

Der mittlere Verlust des Spielers/Spiel beträgt $1{,}40\,€$. Dies ist der Gewinn des Spielebetreibers.

Anzahl Spiele für Verdienst von $1000\,€$*:*

$\frac{1000\,€}{1{,}40\,€} = 714{,}29$

Es müssen etwa 715 *Spiele gespielt werden, damit der Spielebetreiber einen Gewinn von* $1000\,€$ *hat.*

Lösung A11

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen zweier Münzen entspricht zweimaliges Ziehen hintereinander ohne Zurücklegen.
Aufstellung des Ereignisraums und Berechnung der Wahrscheinlichkeiten.

Klausuraufschrieb

Ereignisraum:

$E = \{(0{,}50; 1), (1; 0{,}50), (0{,}50; 2), (2; 0{,}50), (1\,; 2); (2; 1), (0{,}50; 0{,}50), (1; 1), (2; 2)\}$

Wahrscheinlichkeiten:

$P(0{,}50\,€; 0{,}50\,€) = P(X = 1\,€) = \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} = \frac{132}{600}$

$P(1\,€; 1\,€) = P(X = 2\,€) = \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} = \frac{20}{600}$

$P(2\,€; 2\,€) = P(X = 4\,€) = \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} = \frac{56}{600}$

$P\big((0{,}50\,€; 1\,€), (1\,€; 0{,}50\,€\big) = P(X = 1{,}50\,€) = 2 \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{24} = \frac{120}{600}$

$P((0{,}50\,€; 2\,€), (2\,€;\ 0{,}50\,€)) = P(X = 2{,}50\,€) = 2 \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{8}{24} = \frac{192}{600}$

$P((1\,€; 2\,€), (2\,€; 1\,€)) = P(X = 3\,€) = 2 \cdot \frac{5}{25} \cdot \frac{8}{24} = \frac{80}{600}$

Berechnung des Erwartungswertes $E(X)$:

x_i	$1\,€$	$2\,€$	$4\,€$	$1{,}50\,€$	$2{,}50\,€$	$3\,€$
$P(X = x_i)$	$\frac{132}{600}$	$\frac{20}{600}$	$\frac{56}{600}$	$\frac{120}{600}$	$\frac{192}{600}$	$\frac{80}{600}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$0{,}22\,€$	$0{,}07\,€$	$0{,}37\,€$	$0{,}30\,€$	$0{,}80\,€$	$0{,}40\,€$

$E(X) = 0{,}22 + 0{,}07 + 0{,}37 + 0{,}30 + 0{,}80 + 0{,}40 = 2{,}16\,€$

Man kann bei häufiger Versuchsdurchführung durchschnittlich mit $2{,}16\,€$ rechnen.

Lösung A12

Klausuraufschrieb

a) Erwartungswert von G:

g in €	-1	0	1	4
$P(G = g)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$
$g \cdot P(G = g)$	$-0{,}67$	0	$0{,}10$	$0{,}27$

$E(G) = -0{,}67 + 0{,}1 + 0{,}27 = -0{,}30$

b) Gemäß a) macht der Spieler pro Spiel einen Verlust von $0{,}30\,€$. Der Einsatz muss somit auf $0{,}70\,€$ gesenkt werden, damit das Spiel fair ist.

c)

g in €	-1	0	1	a
$P(G = g)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$
$g \cdot P(G = g)$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}a$

$E(G) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}a = 0$

$\frac{1}{15}a = \frac{17}{30} \implies a = 8{,}50$

Aufgrund des Einsatzes von $1\,€$ muss der maximale Auszahlung auf $9{,}50\,€$ angehoben werden, damit das Spiel fair ist.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A13

Klausuraufschrieb

a) *Ereignisraum:*

$E = \{(A;A),(B;B),(C;C),(\overline{A};\overline{A} \wedge \overline{B};\overline{B} \wedge \overline{C};\overline{C})\}$

Wahrscheinlichkeiten:

$P(A;A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; $P(B;B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$; $P(C;C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$P(Gewinn) = P(A;A) + P(B;B) + P(C;C) = \frac{3}{8}$

b)

x_i	$0{,}50$ €	$-0{,}50$ €
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$0{,}1875$	$-0{,}3125$

$G(X) = 0{,}1875 - 0{,}3125 = -0{,}125$

c) Da bei dem Einsatz von $0{,}50$ € der erwartete Verlust des Spielers $0{,}125$ € beträgt, müsste der Einsatz um $0{,}125$ € gesenkt werden, also $0{,}375$ € betragen.
Da ein Einsatz mit einem „halben Eurocent" nicht möglich ist, kann der Einsatz nicht so geändert werden, damit die Lotterie fair ist.

Lösung A14

Klausuraufschrieb

Wahrscheinlichkeiten:

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Druckfehler / Seite an.

$P(X = 0) = 0{,}17$ $\quad$ $P(X = 1) = 0{,}3$

$P(X = 2) = 0{,}27$ $\quad$ $P(X = 3) = 0{,}16$

$P(X \geq 4) = 1 - 0{,}3 - 0{,}27 - 0{,}16 - 0{,}17 = 0{,}10$

Erwartungswert:

Wegen $P(X \geq 4)$ kann der Erwartungswert von X nicht exakt berechnet werden. Wenn wir jedoch $P(X = 4) = 0{,}1$ unterstellen, erhalten wir mit $E(X)$ eine untere Grenze für den möglichen tatsächlichen Erwartungswert.
Da nach durchschnittlicher Druckfehleranzahl gefragt ist, die sich *mindestens* auf einer Zeitungsseite befinden, ist dies auch die gesuchte Größe.

$E(XA) = 0 \cdot 0{,}17 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}27 + 3 \cdot 0{,}16 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}72$

Es sind durchschnittlich mindestens $1{,}72$ *Fehler auf einer Zeitungsseite.*

Lösung A15

Klausuraufschrieb

a) *Ereignisraum:*

$E = \{(weiß),(schwarz;weiß),(schwarz;schwarz:weiß),(schwarz;schwarz;schwarz)\}$

Wahrscheinlichkeiten:

$P(weiß) = P(X = 0)$ $\quad$ $P(schwarz;weiß) = P(X = 1)$

$P(schwarz;schwarz;weiß) = P(X = 2)$ $\quad$ $P(schwarz;schwarz;schwarz) = P(X = 3)$

$P(X = 0) = \frac{4}{10}$ $\quad$ $P(X = 1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{90}$

$P(X = 2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{120}{720}$ $\quad$ $P(X = 3) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{120}{720}$

b)

x_i	20 €	10 €	−10 €
$P(X = x_i)$	$\frac{120}{720}$	$\frac{120}{720}$	$\frac{480}{720}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	3,33 €	1,67 €	−6,67 €

$E(X) = 3{,}33\ € + 1{,}67\ € - 6{,}67\ € = -1{,}67\ €$

Der Spieler hat einen mittleren Verlust von $1{,}67\ €$ *pro Spiel.*

Einsatz für faires Spiel:

Da der Spieler durchschnittlich $1{,}67\ €$ pro Spiel Verlust macht, müsste der Einsatz um $1{,}67\ €$ vermindert werden.

Der Einsatz für ein faires Spiel müsste $8{,}33\ €$ *betragen.*

Lösung A16

Klausuraufschrieb

Ereignisse:

A: „Drei Kugeln gleiche Farbe"

B: „Drei Kugeln unterschiedliche Farbe"

C: „Weder Ereignis A noch Ereignis B"

Wahrscheinlichkeiten

$P(A) = P(rrr; www) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{11}{120}$

$P(B) = P(rwb; rbw; wrb; wbr; brw; bwr) = 3! \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{8} = 6 \cdot \frac{30}{720} = \frac{1}{4}$

$P(C) = 1 - \big(P(A) - P(B)\big) = 1 - \frac{66}{720} - \frac{180}{720} = \frac{79}{120}$

Erwartungswert:

x_i	6 €	2 €	−1,50 €
$P(X = x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{79}{120}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,55 €	0,50 €	−0,9875 €

$E(X) = 0{,}55 + 0{,}50 - 0{,}9875 = 0{,}0625$

Auf lange Sicht gesehen gewinnt der Spieler etwa $0{,}06\ €$ *pro Spiel.*

Lösung A17

Klausuraufschrieb

Ereignisse:

A: „Glücksrad zeigt gerade Zahl"

B: „Glücksrad zeigt ungerade Zahl"

C: „U1 $(w, w) \vee (\overline{w}, \overline{w})$"

D: „U2 $(w, w) \vee (\overline{w}, \overline{w})$"

Wahrscheinlichkeiten:

$P(A) = 0{,}25;\quad P(B) = 0{,}75;\quad P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5;\quad P(D) = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0{,}82$

$P(1\ € \, Gewinn) = P(A \cap D) + P(B \cap C) = 0{,}25 \cdot 0{,}82 + 0{,}75 \cdot 0{,}5 = 0{,}58$

$P(1{,}50\ € \, kein\ Gewinn) = 1 - P(1\ € \, Gewinn) = 0{,}42$

Erwartungswert:

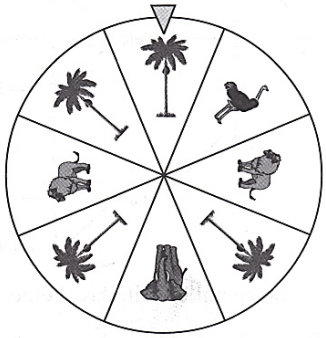
$E(X) = 1 \cdot 0{,}58 - 1{,}50 \cdot 0{,}42 = -0{,}05$

Das Spiel ist nicht fair, der Spieler verliert auf lange Sicht pro Spiel $0{,}05\ €$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A18

Die SMV des ASG unterstützt jedes Jahr ein soziales Kinder- oder Jugendprojekt. Das Geld wird auf dem Schulfest mit einem Informationsstand und einem Glücksrad erwirtschaftet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Folgende Gewinne sind vorgesehen:



Das Rad bleibt zweimal auf Elefant stehen: 5,00 €
Das Rad bleibt zweimal auf Löwe stehen: 3,00 €
Das Rad bleibt zweimal auf Strauß stehen: 1,50 €

Die Einsätze hängen vom Alter der Kinder ab:
Schülerinnen/Schüler, Kinder und Jugendliche 0,50 €
Erwachsene 1,00 €

a) Ermittle die Erwartungswerte der SMV getrennt für Schülerinnen/Schüler, Kinder und Jugendliche sowie für Erwachsene.
b) Die Endabrechnung am Ende des Schulfestes weist folgende Daten auf:
Anzahl der Spiele von Schülerinnen/Schüler, Kindern und Jugendlichen: 372
Anzahl der Spiele Erwachsener: 214
Gesamtgewinn: 217,50 €
Ermittle die Abweichung zwischen dem mit den Erwartungswerten ermittelten Gewinn und dem tatsächlichen Gewinn. Nenne mögliche Gründe für die festgestellte Abweichung.

Aufgabe A19

Die Abschlussklassen des Linden-Gymnasiums in Tuttlingen organisieren zugunsten eines sozialen Projekts eine Tombola. Die Tabelle zeigt die Losverteilung und die damit jeweils verbundenen Gewinne.

Anzahl der Lose	Wert des Gewinns
150 Nieten	Kein Gewinn
40 Kleingewinne	Je 4,00 €
10 Hauptgewinne	Je 20,00 €

Ein Los kostet 2,00 €.

a) Berechne den Erwartungswert.
b) Um den Gewinn für das soziale Projekt zu erhöhen, geben die Klassen 50 weitere Nieten in die Lostrommel.
Welchen Betrag können die Abschlussklassen spenden, wenn alle Lose verkauft werden?

Aufgabe A20

Bei einer Wohltätigkeitsveranstaltung führt die Klasse 12 des ASG Heilbronn ein Glücksspiel durch.
Die Sektoren des dafür verwendeten Glücksrades sind rot, gelb und blau gefärbt.
Die Wahrscheinlichkeit für Rot beträgt 25 %, für Gelb $\frac{1}{3}$.
Das Glücksrad wird einmal gedreht.
Folgender Gewinnplan ist vorgesehen:

Farbe	Gewinn
Rot	4,00 €
Gelb	1,50 €
Blau	0,60 €

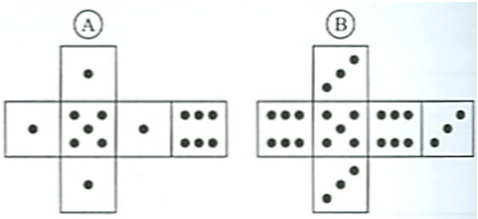
Pro Spiel werden 2,00 € Einsatz verlangt.

a) Berechne den Erwartungswert.

b) Die Klasse möchte ihren zu erwartenden Gewinn pro Spiel verdoppeln. Dabei soll das Glücksrad und der Einsatz pro Spiel nicht verändert werden. Stelle einen möglichen Gewinnplan auf.

Aufgabe A21

Die beiden Netze zeigen die Augenzahlen zweier besonderer Spielwürfel.
Beide Würfel werden gleichzeitig geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine „Sechs" zu werfen?



Die beiden Würfel werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Dazu wird nebenstehender Gewinnplan geprüft. Berechne den Erwartungswert.

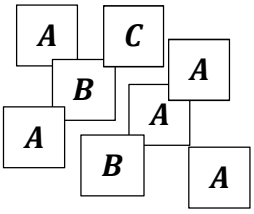
Wurfergebnisse	*Gewinn*
Gleiche Augenzahlen (Pasch)	9,00 €
Verschiedene Augenzahlen	Kein Gewinn

Einsatz pro Spiel: 1,00 €

Der Veranstalter möchte beim Würfelnetz A die „Fünf" durch eine „Sechs" ersetzen.
Der Gewinnplan soll gleich bleiben. Wäre dies für ihn vorteilhaft? Begründe.

Aufgabe A22

Acht gleich große Karten sind mit den Buchstaben A, B und C beschriftet. Die Karten liegen so auf dem Tisch, dass die Buchstaben nicht sichtbar sind. Es werden zwei Karten gleichzeitig gezogen.



- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Karten mit verschiedenen Buchstaben zu ziehen?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

- Die Karten sollen für ein Glücksspiel verwendet werden. Untenstehende Gewinnpläne werden geprüft. Für welchen Gewinnplan soll sich der Betreiber entscheiden? Begründen Sie Ihre Aussage.

Ergebnis der Ziehung	***Gewinnplan 1***	***Gewinnplan 2***
Zwei gleiche Buchstaben	3,00 €	5,00 €
De Buchstabe C ist gezogen	5,00 €	3,00 €
Restliche Möglichkeiten	kein Gewinn	kein Gewinn
Einsatz pro Spiel: 2,50 €		

Aufgabe A23

In einem Kartenstapel liegen zwölf Karten. Die Verteilung ist in der Tabelle dargestellt. Die Karten werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Zwei Karten werden gleichzeitig gezogen.

Kartenfarbe			
schwarz		rot	
♣	♠	♥	♦
Kreuz	Pik	Herz	Karo
Anzahl			
6	1	2	3

- Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote und eine schwarze Karte zu erhalten?

Die zwölf Karten werden für ein Glücksspiel eingesetzt. Es sollen ebenfalls zwei Karten gleichzeitig gezogen werden. Dazu wird der nebenstehende Gewinnplan geprüft.

Ergebnisse	Gewinn
Zweimal Karo	10,00 €
Zweimal Herz	5,00 €
Sonstige	Kein Gewinn
Einsatz pro Spiel 1,00 €	

- Berechne den Erwartungswert.
- Sophie macht den Vorschlag, den Gewinn für „zweimal Karo" auf 20,00 € hochzusetzen und alles andere zu belassen. Der Betreiber des Glücksspiels protestiert und behauptet, er würde dann Verlust machen. Hat der Betreiber Recht? Begründe durch Rechnung.

Hinweis

Bei Aufgaben mit dem Erwartungswert wird empfohlen, unmittelbar eine Tabelle der x_i und $P(X = x_i)$ sowie $x_i \cdot P(X = x_i)$ anzulegen.

Lösung A18

Lösungslogik

a) Aufstellung einer 3-zeilige Tabelle mit Spaltenanzahl = Gewinnanzahl. Ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die Gewinne ungleich $100\,\%$, muss eine weitere Spalte für den Einsatz zugefügt werden.
Die Zeile x_i enthält die einzelnen Gewinnbeträge. Ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die Gewinne ungleich $100\,\%$, muss der Einsatz vom Gewinnbetrag abgezogen werden und der Einsatz wird mit einem Minuszeichen in die letzte Zeilenspalte x_i eingetragen.
Die Zeile $P(X = x_i)$ enthält die Einzelwahrscheinlichkeiten für Gewinn und Einsatz. In der dritten Zeile $x_i \cdot P(X = x_i)$ werden spaltengerecht die Gewinnbeträge sowie der Einsatzbetrag mit ihren jeweiligen Wahrscheinlichkeiten multipliziert.
Am Ende werden alle Werte der dritten Zeile vorzeichengerecht addiert. Das daraus sich ergebende Ergebnis ist der gesuchte Erwartungswert.

b) Vergleich der Einnahmen aus den Erwartungswerten mit denen der echten Einnahmen.

Klausuraufschrieb

Aufstellen der Wahrscheinlichkeiten zu den Gewinnen:

$P(zweimal\ Elefant) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$ $\quad P(zweimal\ Löwe) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{4}{64}$

$P(zweimal\ Strauß) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$ $\quad P(kein\ Gewinn) = 1 - P(Gewinn) = 1 - \frac{1}{64} - \frac{4}{64} - \frac{1}{64} = \frac{58}{64}$

a) *Berechnung der Erwartungswerte*

Tabelle für Schülerinnen/Schüler, Kinder und Jugendliche:

Gewinn/Einsatz (x_i)	$4{,}50\,€$	$2{,}50\,€$	$1{,}00\,€$	$-0{,}50\,€$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{58}{64}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$0{,}07\,€$	$0{,}16\,€$	$0{,}02\,€$	$-0{,}45\,€$
$E(X)$	$0{,}07\,€ + 0{,}16 + 0{,}02 - 0{,}45\,€ = -0{,}20\,€$			

$E(X)_{Jugend} = -0{,}20\,€$

Tabelle für Erwachsene:

Gewinn/Einsatz (x_i)	$4{,}00\,€$	$2{,}00\,€$	$0{,}50\,€$	$-1{,}00\,€$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{58}{64}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$0{,}06\,€$	$0{,}13\,€$	$0{,}01\,€$	$-0{,}90\,€$
$E(X)$	$0{,}06\,€ + 0{,}13 + 0{,}01 - 0{,}90\,€ = -0{,}70\,€$			

$EX_{Erwachsene} - 0{,}70\,€$

Die SMV kann mit einem Gewinn von $0{,}20\,€$ pro Spiel bei den Jugendlichen und von $0{,}70\,€$ pro Spiel bei den Erwachsenen rechnen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) *Abweichung zwischen Erwartungswert und Gesamtgewinn:*
$372 \cdot 0{,}20\,€ + 214 \cdot 0{,}70\,€ = 224{,}20\,€$ Gewinn nach Erwartungswert
$G_{E(X)} - G_{gesamt} = 224{,}20 - 217{,}50 = 6{,}70\,€$
Die Abweichung des tatsächlichen Gewinns zum Erwartungswert beträgt $6{,}70\,€$*.*
Der mit den Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung ermittelte Gesamtgewinn $224{,}20\,€$ ist ein theoretischer Wert. Im konkreten Fall kann er nicht erreicht werden, da der Gesamtgewinn aufgrund der Einsätze und Preise ein Vielfaches von $0{,}50\,€$ sein muss.

Lösung A19

Lösungslogik

a) Aufstellung einer 3-zeilige Tabelle wie in Lösung A9 beschrieben.
b) Aufstellung der Tabelle mit erhöhter Losanzahl und Neuberechnung des Erwartungswertes.

Klausuraufschrieb

a) $P(20\,€) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$ $\quad P(4\,€) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$ $\quad P(-2\,€) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$
Berechnung des Erwartungswertes:

x_i	$18\,€$	$2\,€$	$-2{,}00\,€$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$0{,}90\,€$	$0{,}40\,€$	$-1{,}50\,€$

$E(X) = 0{,}9 + 0{,}40 - 1{,}50 = -0{,}20\,€$

b) *Neuberechnung nach Erhöhung der Losanzahl:*
$P(20\,€) = \frac{10}{250} = \frac{1}{25}$ $\quad P(4\,€) = \frac{40}{250} = \frac{4}{25}$ $\quad P(-2\,€) = \frac{200}{250} = \frac{4}{5}$
Berechnung der Erwartungswerte

x_i	$18\,€$	$2\,€$	$-2{,}00\,€$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{5}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$0{,}72\,€$	$0{,}32\,€$	$-1{,}60\,€$

$E(X) = 0{,}72 + 0{,}32 - 1{,}60 = -0{,}56\,€$
Verkauf aller Lose:
$G = n \cdot |EX| = 250 \cdot 0{,}56 = 140\,€$
Die Schüler der Abschlussklasse können $140\,€$ *spenden, wenn alle Lose verkauft werden.*

Lösung A20

Lösungslogik

a) Aufstellung einer 3-zeilige Tabelle wie in Lösung A9 beschrieben, jedoch ohne Spalte für den Einsatz, da die gegebenen Wahrscheinlichkeiten in der Summe $100\,\%$ ergeben. Berechnung des Erwartungswertes.
b) Berechnung eines neuen Gewinnplans für den Erwartungswert 0,5.

Klausuraufschrieb

a) $P(rot) = \frac{1}{4}$ $P(gelb) = \frac{1}{3}$ $P(blau) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

Berechnung der Erwartungswerte

x_i	4 €	1,50 €	0,60 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	1,00 €	0,50 €	0,25 €

$E(X) = 1{,}00 + 0{,}50 + 0{,}25 = 1{,}75$ €

Gewinn pro Spiel: $Gewinn = Einsatz - E(X) = 2{,}00 - 1{,}75 = 0{,}25$ €

b) *Verdoppelung des Gewinns:*

$2 \cdot 0{,}25 = 0{,}50 = 2{,}00 - E(X) \Longrightarrow E(X) = 1{,}50$

Mit einer Veränderung des Gewinns von 4 € auf 3 € ergibt sich:

$E(X) = 3 \cdot \frac{1}{4} + 1{,}50 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}60 \cdot \frac{5}{12} = 0{,}75 + 0{,}50 + 0{,}25 = 1{,}50$ €

Der Gewinnplan muss von 4 € auf 3 € verändert werden, damit die Klasse den doppelten Gewinn macht.

(Andere Lösungen denkbar).

Lösung A21

Lösungslogik

Wahrscheinlichkeit „mindestens eine Sechs":

Wir stellen die Wahrscheinlichkeit einer Sechs für Würfel A und Würfel B auf. Würfel A hat nur eine Sechs, also $P(6_A) = \frac{1}{6}$. Würfel B hat zwei Sechsen, also $P(6_B) = \frac{2}{6}$.

Mindestens eine Sechs bedeutet eine Sechs oder zwei Sechsen. Am Wort „mindestens" erkennen wir, dass der schnellste Lösungsweg über das Gegenereignis führt, denn „mindestens eine Sechs" ist dasselbe wir $1 -$ „keine Sechs". Keine Sechs bei Würfel A ist $P(\overline{6_A}) = \frac{5}{6}$, bei Würfel B jedoch $P(\overline{6_B}) = \frac{4}{6}$.

Erwartungswert:

Zunächst müssen wir die Einzelwahrscheinlichkeiten für die Ereignisse „Pasch" bestimmen. Aufgrund des Aufbaus der beiden Würfel sind nur die Ereignisse $\{5; 5\}$ und $\{6; 6\}$ möglich. $P(6_A)$ und $P(6_B)$ sind bereits bekannt, $P(5_A) = P(5_B) = \frac{1}{6}$.

Wir bestimmen nun den Erwartungswert über eine Tabelle.

Ersatz der „Fünf" bei Würfel A durch eine „Sechs":

Durch den Ersatz ist nunmehr ein 5–er Pasch ausgeschlossen, es ist nur noch ein 6–er Pasch möglich, wobei jetzt $P(6_A) = P(6_B) = \frac{2}{6}$ ist. Wir berechnen den Erwartungswert neu und vergleichen diesen mit dem Vorwert.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

$P(6_A) = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $P(\overline{6_A}) = \frac{5}{6}$

$P(6_B) = \frac{2}{6}$ $\qquad$ $P(\overline{6_B}) = \frac{4}{6}$

$P(mindestens\ 1\ Sechs) = 1 - P(keine\ Sechs)$

$$= 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = 1 - \frac{20}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \approx 44{,}4\ \%$$

Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt $44{,}4\ \%$.

Erwartungswert:

$P(Pasch) = P\{(5;5),(6;6)\} = P(5;5) + P(6;6)$

$P(5;5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ $\qquad$ $P(6;6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{36}$

$P(Pasch) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P(Gewinn)$

$P(\overline{Gewinn}) = 1 - P(Gewinn) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

Gewinn/Einsatz (x_i)	8,00 €	−1,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$\frac{8}{12}$ €	$-\frac{11}{12}$ €
$E(X)$	$\frac{8}{12}\ € - \frac{11}{12}\ € = -\frac{3}{12}\ € = -0{,}25\ €$	

Der Erwartungswert ist $E(X) = -0{,}25$.

Ersatz der „Fünf" bei Würfel A

Es ist nur noch das Ereignis $\{6;6\}$ möglich.

$P(6_A) = P(6_B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(Gewinn) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$P(\overline{Gewinn}) = 1 - P(Gewinn) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

Gewinn/Einsatz (x_i)	8,00 €	−1,00 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$\frac{8}{9}$ €	$-\frac{8}{9}$ €
$E(X)$	$\frac{8}{9}\ € - \frac{8}{9}\ € = 0\ €$	

Der Erwartungswert nach Ersatz der „Fünf" bei Würfel A *ist* 0*, d.h., das Spiel ist fair, das Ersetzen wäre für den Veranstalter nicht vorteilhaft.*

Lösung A22

Lösungslogik

Gleichzeitiges Ziehen von zwei Karten entspricht Ziehen von zwei Karten hintereinander ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit für zwei Karten mit unterschiedlichen Buchstaben ist die Wahrscheinlichkeit der Einzelereignisse $P(A;B)$, $P(B;A)$, $P(B;C)$, $P(C;B)$, $P(A;C)$ und $P(C;A)$. Einfacher ist hier der Weg über das Gegenereignis, nämlich $1 - P(zwei\ gleichen\ Buchstaben)$.

Für die Prüfung der Gewinnpläne erstellen wir eine Tabelle zur Errechnung der Erwartungswerte.

Klausuraufschrieb

$P(A;A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$; $P(B;B) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{56}$; $P(C;C) = 0$

$P(zwei\ unterschiedliche\ Buchstaben) = 1 - P(zwei\ gleichen\ Buchstaben)$

$= 1 - \frac{22}{56} = \frac{34}{56} \approx 60{,}7\%$

Erwartungswerte:

$P(zwei\ gleichen\ Buchstaben) = \frac{22}{56}$

$P(Buchstabe\ C\ ist\ gezogen) = P(A;C) + P(C;A) + P(B;C) + P(C;B)$

$P(A;C) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{56}$, $P(C;A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{56}$, $P(B;C) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{56}$, $P(C;B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{56}$

$P(Buchstabe\ C\ ist\ gezogen) = \frac{9}{56}$

Gewinnplan 1

	$P(gleiche\ Buchstaben)$	$P(Buchstabe\ C)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	$-0{,}50$ €	$-2{,}50$ €	$2{,}50$ €
$P(X = x_i)$	$\frac{22}{56}$	$\frac{9}{56}$	$\frac{25}{56}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$-0{,}20$ €	$-0{,}40$ €	$1{,}17$ €
$E(X)$	$-0{,}20\ € - 0{,}40\ € + 1{,}17\ € = 0{,}57\ €$		

Gewinnplan 2

	$P(gleiche\ Buchstaben)$	$P(Buchstabe\ C)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	$-2{,}50$ €	$-0{,}50$ €	$2{,}50$ €
$P(X = x_i)$	$\frac{22}{56}$	$\frac{9}{56}$	$\frac{25}{56}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$-0{,}98$ €	$-0{,}08$ €	$1{,}17$ €
$E(X)$	$-0{,}98\ € - 0{,}08\ € + 1{,}17\ € = 0{,}11\ €$		

Der Spielebetreiber sollte sich für Gewinnplan 1 entscheiden, da er hier auf lange Sicht gesehen einen größeren Gewinn pro Spiel erzielt.

Lösung A23

Lösungslogik

Aufstellen der Wahrscheinlichkeiten für die schwarzen und die roten Karten.
Gleichzeitiges Ziehen von zwei Karten entspricht Ziehen von zwei Karten hintereinander ohne Zurücklegen.
Eine rote und eine schwarze Karte hat die Ergebnisse „schwarz, rot" oder „rot, schwarz".
Berechnung des Erwartungswertes über eine Tabelle.
Berechnung des Erwartungswertes für geänderten Gewinnplan über eine Tabelle.

Klausuraufschrieb

$P(schwarz) = \frac{7}{12}$; $P(rot) = \frac{5}{12}$

$P(eine\ rote\ und\ eine\ schwarze\ Karte) = P\{(r;s),(s,r)\} = P(r,s) + P(s,r)$

$P(r,s) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{35}{132}$ $\quad P(r,s) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$

$P(eine\ rote\ und\ eine\ schwarze\ Karte) = \frac{35}{132} + \frac{35}{132} = \frac{70}{132} \approx 53{,}03\ \%$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Erwartungswerte:

$P(zweimal\ Karo) = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{6}{132}$

$P(zweimal\ Herz) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{132}$

Gewinnplan 1

	$P(zweimal\ Karo)$	$P(zweimal\ Herz)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	$-9{,}00$ €	$-4{,}00$ €	$1{,}00$ €
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{132}$	$\frac{2}{132}$	$\frac{124}{132}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$-0{,}41$ €	$-0{,}06$ €	$0{,}94$ €
$E(X)$	$-0{,}41\ € - 0{,}06\ € + 0{,}94\ € = 0{,}47\ €$		

Der Spielebetreiber kann auf lange Sicht gesehen mit einer Einnahme von $0{,}47$ € *pro Spiel rechnen.*

Gewinnplan 2

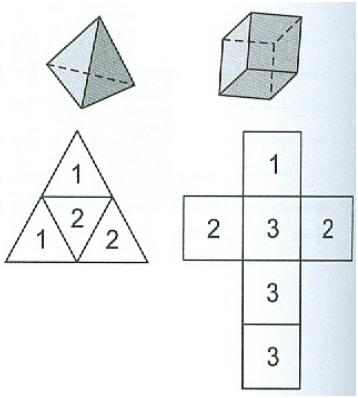
	$P(zweimal\ Karo)$	$P(zweimal\ Herz)$	Einsatz
Gewinn/Einsatz (x_i)	$-19{,}00$ €	$-4{,}00$ €	$1{,}00$ €
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{132}$	$\frac{2}{132}$	$\frac{124}{132}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$-0{,}73$ €	$-0{,}06$ €	$0{,}94$ €
$E(X)$	$-0{,}73\ € - 0{,}06\ € + 0{,}94\ € = 0{,}15\ €$		

Der Spielebetreiber kann nach wie vor mit einer Einnahme pro Spiel rechnen, der Spielebetreiber hat nicht Recht.

Aufgabe A1

Die Seiten eines Tetraeders und eines Würfels sind wie abgebildet mit Zahlen beschriftet. Beide werden gleichzeitig geworfen. Dabei gilt bei dem Tetraeder die Zahl als geworfen, die unten liegt.

a) Begründe, dass die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse
A: "Die Summe der Zahlen ist 5" und
B: "Die Summe der Zahlen ist 3"
jeweils $\frac{1}{4}$ beträgt.



b) Bei einem Glücksspiel werden das Tetraeder und der Würfel gleichzeitig geworfen. Ein Spieler zahlt einen bestimmten Betrag als Einsatz ein. Ist die Augensumme gerade, erhält er seinen Einsatz zurück. Ist die Augensumme gleich 5, bekommt er 3 € ausgezahlt.
In allen anderen Fällen ist sein Einsatz verloren.
Wie hoch sollte der Einsatz sein, damit er auf lange Sicht weder Verlust noch Gewinn macht?

Aufgabe A2

Eine Firma stellt Energiesparlampen her. Die Herstellungskosten für eine Lampe betragen 3,50 €. Sie wird für 5,20 € an den Einzelhandel verkauft.
Erfahrungsgemäß sind 8,5 % der Lampen defekt. Defekte Lampen werden vom Einzelhandel stets entdeckt. Sie werden von der Firma zurückgenommen und der Kaufpreis wird erstattet. Für jede zurückgenommene Lampe entstehen der Firma zusätzliche Kosten in Höhe von 1,20 €.

a) Wie hoch ist der durchschnittliche Gewinn pro Lampe für die Firma?
Um den Gewinn zu steigern, will die Firma vor der Auslieferung der Lampen ein Testverfahren durchführen. Dabei werden alle intakten und 90 % aller defekten Lampen als solche erkannt. Die als defekt erkannten Lampen werden dann ohne weitere Kosten entsorgt.

b) Wie teuer darf der Test einer Lampe sein, damit sich das Testverfahren für die Firma lohnt?

Aufgabe A3

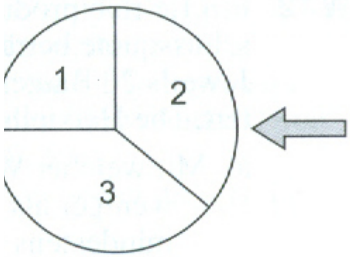
Bei einem Glücksspiel wird ein idealer Würfel dreimal geworfen. Man erhält:
für eine Sechs 1 €,
für zwei Sechsen 5 €,
für drei Sechsen 10 €
ausgezahlt. In allen anderen Fällen wird nichts ausgezahlt.
Welchen Einsatz muss der Betreiber des Glücksspiels mindestens verlangen, damit er auf lange Sicht keinen Verlust macht?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A4

Bei dem abgebildeten Glücksrad erhält man bei einer Drehung die Zahl 1 mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}25$ und die Zahl 2 mit der Wahrscheinlichkeit p.

a) Das Glücksrad wird dreimal gedreht.
Man betrachtet das Ereignis:
A: "Es erscheinen drei verschiedene Zahlen"
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von A für $p = 0{,}3$.
Für welchen Wert von p ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A am größten? Wie groß sind in diesem Fall die Mittelpunktswinkel der drei Sektoren auf dem Glücksrad?



b) Felix und Max vereinbaren folgendes Spiel:
Felix setzt einen Euro ein. Dann dreht Max das Rad. Erscheint eine 2, so nimmt Max den Euro an sich und das Spiel ist beendet. Andernfalls legt Max zwei Euro dazu und Felix dreht das Rad. Bei einer 2 bekommt Felix den Gesamtbetrag von drei Euro. Ansonsten teilen sich beide diesen Betrag und das Spiel ist beendet. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit p für die Zahl 2 sein, damit das Spiel möglichst fair ist?

Aufgabe A5

Ein Betrieb produziert für ein großes Unternehmen elektronische Bauteile. Die Ausschussquote beträgt dabei erfahrungsgemäß $15\,\%$.
Jeweils 20 Bauteile werden ohne Überprüfung in eine Schachtel gepackt und ausgeliefert. Die Herstellungskosten pro Schachtel betragen 55 €.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in einer Schachtel
- weniger als 16,
- mindestens 18

einwandfreie Bauteile?

b) Dem Unternehmen werden für jede gelieferte Schachtel 120 € berechnet. Allerdings werden die Bauteile im Unternehmen überprüft. Ist in einer Schachtel höchstens ein Bauteil defekt, so zahlt das Unternehmen den vollen Preis. Bei zwei bis vier defekten Bauteilen in einer Schachtel zahlt es nur $50\,\%$ des Preises. Bei mehr als vier defekten Bauteilen wird die Schachtel nicht bezahlt.
Macht der Herstellerbetrieb bei dieser Vereinbarung noch Gewinn?

Aufgabe A6

Bei einer großen Produktionsserie von Speicherchips beträgt der Ausschussanteil $10\,\%$. Chips dieser Serie werden ungeprüft in Packungen zu je 100 Stück verkauft.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in einer Packung höchstens 10 defekte Chips?

b) Der Kaufpreis für einen Großabnehmer beträgt pro Packung $800\,€$. Mit dem Abnehmer wird vereinbart, dass eine Packung zurückgegeben und der Kaufpreis erstattet wird, wenn mehr als k defekte Chips in der Packung sind. Für eine solche Rücknahme entstehen der Herstellerfirma Kosten in Höhe von $250\,€$.
Welchen Wert muss k mindestens haben, damit der durchschnittliche Erlös pro Packung mindestens $700\,€$ beträgt?

Aufgabe A7

Bei einem Glücksspiel wird ein idealer Würfel viermal geworfen und die Anzahl der Sechsen notiert.
Als Auszahlungen sind vorgesehen:

$0\,€$ bei höchstens einer Sechs,
$2\,€$ bei zwei Sechsen,
$10\,€$ bei drei Sechen,
$50\,€$ bei vier Sechen.

Der Einsatz pro Spiel beträgt $1\,€$

a) Begründen Sie, dass das Spiel nicht fair ist.

b) Der Auszahlungsplan soll so geändert werden, dass der Erwartungswert für den Verlust eines Spielers 20 Cent beträgt. Dazu soll auch für den Fall, dass höchstens eine Sechs notiert wird, ein Betrag ausgezahlt werden sowie das 10–fache dieses Betrages bei zwei Sechsen. Die beiden anderen Auszahlungsbeträge bleiben unverändert. Bestimme die geänderten Auszahlungsbeträge.

Aufgabe 8

Aus Umfragen weiß man, dass aller Handybesitzer ein Gerät der Marke SUN verwenden. Es werden zufällig 300 Handybesitzer ausgewählt. Die Zufallsvariable X beschreibt darunter die Anzahl der Handybesitzer, die ein Gerät der Marke SUN nutzen.

a) Mit welcher Anzahl von SUN-Nutzern kann man rechnen?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit nutzen mehr als 100 Handybesitzer ein SUN-Gerät?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der SUN-Nutzer um höchstens 10 vom Erwartungswert von X ab?
Bestimme eine möglichst kleine natürliche Zahl a so, dass die Anzahl der SUN-Nutzer mit mindestens $95\,\%$ Wahrscheinlichkeit um höchstens a vom Erwartungswert von X abweicht.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe 9

Bei einer Lotterie werden Lose verkauft, auf denen jeweils eine von einem Computer zufällig erzeugte sechsstellige Zahl aufgedruckt ist. Jede dieser Zahlen besteht nur aus den Ziffern 0 und 1, die mit Wahrscheinlichkeiten $0{,}75$ bzw. $0{,}25$ erzeugt werden. Jedes Los, bei dem die aufgedruckte Zahl mehr als dreimal die Ziffer 1 enthält, ist ein Gewinnlos.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein Gewinnlos zu erhalten?

b) Für Gewinnlose gilt der folgende Auszahlungsplan:

Anzahl der Ziffern 1 auf dem Gewinnlos	4	5	6
Auszahlung in €	5	50	500

Die Lotteriegesellschaft will pro Los durchschnittlich mindestens $0{,}50$ € verdienen. Wie muss dazu der Preis für ein Los kalkuliert werden?

Aufgabe 10

In einer Bevölkerung ist eine Viruserkrankung ausgebrochen. Der Anteil der infizierten Personen, bei denen die Krankheit aber noch nicht ausgebrochen ist, ist p. Mit einem neu entwickelten Bluttest kann man das Virus sicher nachweisen. Er soll bei einer Reihenuntersuchung eingesetzt werden, um die Krankheit bereits vor Ausbruch zu diagnostizieren. Um die Zahl der teuren Tests möglichst klein zu halten, wird dabei Blut von 20 Personen gemischt und untersucht. Nur wenn sich dabei das Virus nachweisen lässt, wird das Blut jeder der 20 Personen noch einmal einzeln untersucht.

a) Man geht zunächst von $p = 0{,}05$ aus. Mit wie vielen Tests muss man durchschnittlich bei Gruppen von 20 Personen rechnen?

b) Für welchen Wert von p sind bei diesem Verfahren durchschnittlich 10 Tests pro Gruppe von 20 Personen zu erwarten?

Aufgabe 11

Eine Firma produziert elektrische Rasierapparate. Erfahrungsgemäß sind $6\,\%$ der produzierten Apparate defekt. Um die defekten Rasierapparate vor dem Verkauf auszusondern, werden alle Geräte überprüft. Bei dieser Überprüfung kommt es bei den defekten Geräten mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}09$ und bei den intakten Geräten mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}01$ zu einer Fehlentscheidung. Alle bei der Überprüfung als intakt deklarierten Geräte werden zum Verkauf freigegeben.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es bei der Kontrolle eines Rasierapparats zu einer Fehlentscheidung kommt?

b) Bei wie vielen von 10000 produzierten Rasierapparaten kann man mit einer Verkaufsfreigabe rechnen?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der tatsächlich freigegebenen Apparate um höchstens 25 davon ab?

Lösung A1

Lösungslogik

a) Es handelt sich um ein zweistufiges Zufallsexperiment mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Aufstellen des Ereignisraums und der Einzelwahrscheinlichkeiten nach den Pfadregeln.

b) Bestimmung des Erwartungswertes $E(X) = 0$.

Klausuraufschrieb

a) A: „Die Summe der Zahlen ist 5"

Tetraeder: $P_T(1) = \frac{1}{2};\ P_T(2) = \frac{1}{2}$

Würfel: $P_W(1) = \frac{1}{6};\ P_W(2) = \frac{1}{3};\ P_W(3) = \frac{1}{2}$

$A = (\{2_T; 2_W\})$

$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

B: „Die Summe der Zahlen ist 3"

$B = \{(1_T; 2_W), (1_W; 2_T)\}$

$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

b) C: „Die Augensumme ist gerade"

$C = \{(1_T; 1_W), (2_T; 2_W), (1_T; 3_W)\}$

$P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Der Einsatz sei a.

x_i	$3-a$	0	$-a$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) = \frac{1}{4} \cdot (3-a) + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-a) = 0$

$\frac{3}{4} - \frac{a}{4} - \frac{a}{4} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 1{,}50$

Bei einem Einsatz von $1{,}50$ € macht ein Spieler bei diesem Spiel auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust.

Lösung A2

Lösungslogik

a) Der durchschnittliche Gewinn entspricht dem Erwartungswert $E(X)$.

b) Wie bei a) entspricht der durchschnittliche Gewinn dem Erwartungswert, wobei hier bei mit $0{,}9$ durch das Testverfahren entdecktem Defekt ein reduzierter Verlust entsteht. Die Einführung des Testverfahrens lohnt sich für die Firma, wenn die Testkosten pro Lampe geringer sind als der Unterschied der Erwartungswerte aus b) und a).

Klausuraufschrieb

a) Gewinn Lampe intakt: $5{,}20\ € - 3{,}50\ € = 1{,}70\ €$

Gewinn Lampe defekt: $5{,}20\ € - 5{,}20\ € - 3{,}50\ € - 1{,}20\ € = -4{,}70\ €$

$P(X = 1{,}70) = 1 - 0{,}085 = 0{,}915$

$P(X = -4{,}70) = 0{,}085$

$E_a(X) = 0{,}915 \cdot 1{,}70 + 0{,}085 \cdot (-4{,}70) = 1{,}156$

Der durchschnittliche Gewinn pro Lampe beträgt etwa $1{,}16$ €.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) Gewinn Lampe intakt: $1{,}70\,€$
Gewinn Lampe defekt Fehler erkannt: $-3{,}50\,€$
Gewinn Lampe defekt Fehler nicht erkannt: $-4{,}70\,€$
$P(X = 1{,}70) = 0{,}915$
$P(X = -3{,}50) = 0{,}085 \cdot 0{,}9 = 0{,}0765$
$P(X = -4{,}70) = 0{,}085 \cdot 0{,}1 = 0{,}0085$
$E_b(X) = 0{,}915 \cdot 1{,}70 + 0{,}0765 \cdot (-3{,}50) + 0{,}0085 \cdot (-4{,}70) = 1{,}25$
$E_b(X) - E_a(X) = 1{,}25 - 1{,}16 = 0{,}09$
Der Test einer Lampe muss weniger als $0{,}09\,€$ kosten, damit sich die Einführung des Testverfahrens lohnt.

Lösung A3

Lösungslogik

Der Erwartungswert ist zu berechnen und ein Spieleinsatz zu ermitteln, der zu $E(X) = 0$ führt.

Klausuraufschrieb

$P(eine\ 6) = 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{75}{216}$
$P(zweimal\ 6) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$
$P(dreimal\ 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$
$P(Niete) = 1 - \frac{75+15+1}{216} = \frac{125}{216}$
Der Einsatz sei a.

x_i	$10-a$	$5-a$	$1-a$	$-a$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{125}{216}$

$E(X) = \frac{10-a+15\cdot(5-a)+75\cdot(1-a)-125\cdot a}{216} = 0$
$10 + 75 + 75 - 216a = 0$
$160 = 216a \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}74$
Der Einsatz bei dem Spiel muss mindestens $0{,}74\,€$ betragen, damit der Betreiber langfristig keinen Verlust macht.

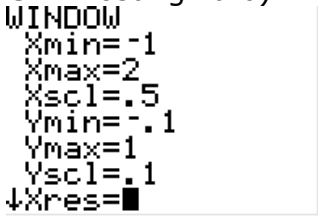
Lösung A4

Lösungslogik

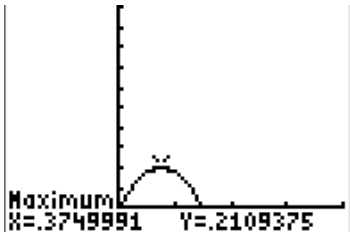
a) Berechnung der Wahrscheinlichkeit entsprechend den Pfadregeln. Ist p unbekannt, ergibt sich eine quadratische Gleichung mit einem Maximum. Die jeweiligen Mittelpunktswinkel ergeben sich aus $\alpha_n = p_n \cdot 360°$.

b) Ermittlung des Erwartungswertes mit $E(X) = 0$.
GTR-Einstellungen
Y1: $1{,}5 * X * (0{,}75 - X)$

GTR-Lösung zu b)



4: Maximum



Klausuraufschrieb

a) $P(1) = 0{,}25$
$P(2) = 0{,}3$
$P(3) = 1 - 0{,}25 - 0{,}3 = 0{,}45$
$P(A) = 3! \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}45 = 0{,}2025$
Die Wahrscheinlichkeit von A für $p = 0{,}3$ beträgt $20{,}25\,\%$.

$P(A(p)) = 3! \cdot 0{,}25 \cdot p \cdot (0{,}75 - p) = 1{,}5 \cdot p \cdot (0{,}75 - p)$

$P(A(p))_{max} \overset{GTR}{\approx} 0{,}2109$ für $p \overset{GTR}{\approx} 0{,}375$

Für $p = 0{,}375$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass drei verschiedene Zahlen erscheinen am größten.

Mittelpunktswinkel:

$\alpha_1 = p_1 \cdot 360\,° = 90°$ $\quad \alpha_2 = 0{,}375 \cdot 360\,° = 135°$ $\quad \alpha_3 = 360\,° - \alpha_1 - \alpha_2 = 135°$

b) X gibt den Gewinn von Felix nach Abzug seines Einsatzes an. Felix kann:

einen Euro verlieren (⟶ Max erhält eine 2)

zwei Euro gewinnen (⟶ Felix erhält eine 2)

0,50 Euro gewinnen (⟶ der Betrag von 3 € wird geteilt)

$x_i \in \{-1; 2; 0{,}5\}$

x_i	-1	2	$0{,}5$
$P(X = x_i)$	p	$(1-p) \cdot p$	$(1-p)^2$
	1. Drehung 2	1. Drehung $\overline{2}$ 2. Drehung 2	1. Drehung $\overline{2}$ 2. Drehung $\overline{2}$

$E(X) = -p + 2 \cdot p(1-p) + 0{,}5 \cdot (1-p)^2 = 0$

$-p + 2p - 2p^2 + 0{,}5 - p + 0{,}5p^2 = 0$

$-1{,}5p^2 + 0{,}5 = 0$

$p^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow \quad p \approx 0{,}5774$

Beträgt die Wahrscheinlichkeit für die Zahl 2 ungefähr 57,7 %, so ist das Spiel nahzu fair.

Lösung A5

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X für intakte Bauteile ist $B_{20;0{,}85}$-verteilt.

b) Die Zufallsvariable X für defekte Bauteile ist $B_{20;0{,}15}$-verteilt.

Klausuraufschrieb

a) X für einwandfreie Bauteile ist $B_{20;0{,}85}$-verteilt.

Weniger als 16 einwandfreie Bauteile:

$B_{20;0{,}85}(X \leq 15) \overset{GTR}{\approx} 0{,}17015 \approx 17\,\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 17 %.sind weniger als 16 einwandfreie Bauteile in einer Schachtel mit 20 Stück.

Mindestens 18 einwandfreie Bauteile:

$B_{20;0{,}85}(X \geq 18) = 1 - B_{20;0{,}85}(X \leq 17) \overset{GTR}{\approx} 0{,}404896 \approx 40{,}5\,\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 40,5 %.sind mindestens 18 einwandfreie Bauteile in einer Schachtel mit 20 Stück.

b) X für defekte Bauteile ist $B_{20;0{,}15}$-verteilt.

Höchstens ein Bauteil defekt:

$B_{20;0{,}15}(X \leq 1) \overset{GTR}{\approx} 0{,}17556 \approx 17{,}6\,\%$

Zwei bis vier defekte Bauteile:

$B_{20;0{,}15}(2 \leq X \leq 4) = B_{20;0{,}15}(X \leq 4) - B_{20;0{,}15}(X \leq 1) \overset{GTR}{\approx} 0{,}65429 \approx 65{,}4\,\%$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Mehr als vier defekte Bauteile:
$p = 100 - 17{,}6 - 65{,}4 = 17\,\%$
G beschreibt den Ertrag, den der Betrieb pro Schachtel erzielt. Der mittlere Ertrag ist der Erwartungswert $E(G)$.

g_i	120	60	0
$P(G = g_i)$	0,176	0,654	0,17

$E(G) = 0{,}176 \cdot 120 + 0{,}654 \cdot 60 + 0{,}17 \cdot 0 = 60{,}36$
Da der mittlere Ertrag von $60{,}36\,€$ *pro Schachtel größer als die Herstellkosten von* $55\,€$ *ist, macht der Herstellerbetrieb auf lange Sicht Gewinn.*

Lösung A6

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X für defekte Speicherchips ist $B_{100;0,1}$-verteilt.
b) Die Zufallsvariable X für defekte Speicherchips ist $B_{100;0,1}$-verteilt.
GTR-Einstellungen
Y1:$binomcdf(100, .1, X)$

Klausuraufschrieb

a) X für defekte Speicherchips ist $B_{100;0,1}$-verteilt.
Höchstens 10 defekte Chips pro Packung:
$B_{100;0,1}(X \leq 10) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}5832 \approx 58{,}3\,\%$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $58{,}3\,\%$*.sind höchstens* 10 *defekte Speicherchips in einer Packung mit* 100 *Stück.*

b) X für defekte Speicherchips ist $B_{100;0,1}$-verteilt.
Sei G der Erlös pro Packung. Der mittlere Erlös ist der Erwartungswert $E(G)$.
$P(G = -250) = B_{100;0,1}(X > k)$ (Packung wird zurückgegeben)
$P(G = 800) = B_{100;0,1}(X \leq k)$ (Packung wird akzeptiert)
$E(G) = -250 \cdot B_{100;0,1}(X > k) + 800 \cdot B_{100;0,1}(X \leq k)$
$= -250 \cdot (1 - P(X \leq k) + 800 \cdot P(X \leq k)$
$= -250 + 1050 \cdot P(X \leq k)$
$E(G) \geq 700$ (laut Aufgabenstellung)
$-250 + 1050 \cdot B_{100;0,1}(X \leq k) \geq 700$
$1050 \cdot B_{100;0,1}(X \leq k) \geq 950$
$B_{100;0,1}(X \leq k) \geq 0{,}9048 \quad \Longrightarrow \quad k \overset{\text{GTR}}{=} 14$
Eine Rückgabe sollte erst bei mehr als 14 defekten Chips erfolgen, damit der durchschnittliche Erlös pro Packung mindestens $700\,€$ beträgt.

Lösung A7

Lösungslogik

Die Zufallsvariable gibt die Anzahl der geworfenen Sechsen an. Da die Wahrscheinlichkeitssumme der Einzelereignisse gleich 1 ist, bleibt die Angabe über den Einsatz pro Spiel unberücksichtigt.
a) Aufstellen der Tabelle und Berechnung von $E(X)$.
b) Anpassung der Tabelle aus a) an den neuen Gewinnplan. Dabei wird der Auszahlungsbetrag für höchstens eine Sechs auf eine Variable gesetzt und der der Auszahlungsbetrag für zwei Sechsen auf das Zehnfache dieser Variablen.

Klausuraufschrieb

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1125}{1296}$

$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6 \cdot \frac{25}{1296} = \frac{150}{1296}$

$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = 4 \cdot \frac{5}{1296} = \frac{20}{1296}$

$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296}$

a)

x_i	0 €	2 €	10 €	50 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1125}{1296}$	$\frac{150}{1296}$	$\frac{20}{1296}$	$\frac{1}{1296}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0 €	0,2315 €	0,1543 €	0,0386 €

$E(X) = 0 + 0{,}2315 + 0{,}01543 + 0{,}0386 = 0{,}4244$

Da der Erwartungswert kleiner ist als der Einsatz von 1 €*, ist das Spiel nicht fair.*

b) *Neue Auszahlungsbeträge*

x_i	a €	$10a$ €	10 €	50 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1125}{1296}$	$\frac{150}{1296}$	$\frac{20}{1296}$	$\frac{1}{1296}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0 €	0,2315 €	0,1543 €	0,0386 €

$E(X) = 0{,}0881a + 1{,}1574a + 0{,}01543 + 0{,}0386 = 0{,}20$

$1{,}2455a = 0{,}14597 \implies a = 0{,}1172$

Der neue Auszahlungsbetrag für höchstens eine Sechs beträgt 0,12 € *und der für zwei Sechsen beträgt damit* 1,20 €*.*

Lösung A8

Lösungslogik

Die Erwartungswert in der Binomialverteilung errechnet sich aus $\mu = n \cdot p$.

b) Gesucht ist im ersten Teil die Wahrscheinlichkeit $P(\mu - 10 \leq X \leq \mu + 10)$.
Im zweiten Teil der Aufgabe ist ein a gesucht, für das gilt:
$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) \geq 0{,}95$.

Klausuraufschrieb

a) $E(X) = \mu = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}3 = 90$

Man kann mit 90 *Handynutzern der Mare SUN rechnen.*

$B_{300;0,3}(X \geq 100) = 1 - B_{300;0,3}(X \leq 99) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}1163$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 100 *Handybesitzer ein SUN-Gerät nutzen beträgt etwa* 11,6 %*.*

b) $B_{300;0,3}(80 \leq X \leq 100) = B_{300;0,3}(X \leq 100) - B_{300;0,3}(X \leq 79) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}0029$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,3 % *weicht die Anzahl der SUN-Nutzer um höchstens* 10 *vom Erwartungswert ab.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Teil 2 GTR-Einstellungen:

Y1: $binomcdf(300, .3, 90 + X) - binomcdf(300, .3, 89 - X)$

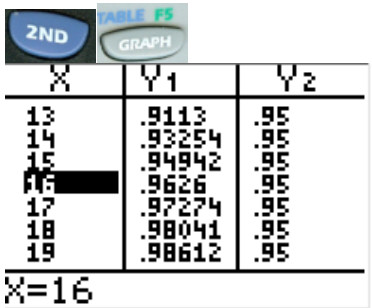
$B_{300;0,3}(90 - a \leq X \leq 90 + a)$

$= B_{300;0,3}(X \leq 90 + a) - B_{300;0,3}(X \leq 89 - a)$

$\geq 0{,}95$

$a \overset{\text{GTR}}{=} 16$

Die kleinste natürliche Zahl lautet $a = 16$.



Lösung A9

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X für die Anzahl von 1–en ist $B_{6;0,25}$ –verteilt.

b) Der Erwartungswert $E(X)$ ist zu bilden und dem Einsatz a gegenüber zu stellen, wobei $a - E(X) = 0{,}5$ sein muss.

Klausuraufschrieb

a) X für die Anzahl der 1–en ist $B_{6;0,25}$ –verteilt.

$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}0376 \approx 3{,}8\%$

Die Wahrscheinlichkeit ein Gewinnlos zu erhalten beträgt ca. $3{,}8\%$.

b) *Gewinnwahrscheinlichkeiten:*

$P(X = 4) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}03296$

$P(X = 5) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}00439$

$P(X = 6) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}00024$

$E(X) = 5 \cdot 0{,}03296 + 50 \cdot 0{,}00439 + 500 \cdot 0{,}00024 \approx 0{,}50$

Der Einsatz sei a. Dann gilt:

$a - E(X) = 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad a = 1{,}00$

Langfristig muss die Lotteriegesellschaft pro Los durchschnittlich $0{,}50$ € *auszahlen. Um mindestens* $0{,}50$ € *pro Los zu verdienen, sollte der Preis daher mindestens* $1{,}00$ € *betragen.*

Lösung A10

Lösungslogik

a) Die Zufallsvariable X für die Anzahl infizierter Personen ist $B_{20;0,05}$ –verteilt. Ist $X = 0$ (kein Blut eines infizierten im Gemisch) ist kein weiterer Test erforderlich. Ist $X \geq 0$ müssen alle 20 Proben einzeln untersucht werden, hinzu kommt noch der bereits durchgeführte Gruppentest. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl durchzuführender Versuche an. Der Durchschnitt entspricht dem Erwartungswert:

$E(X) = 1 \cdot P(X = 0) + 21 \cdot P(X \geq 1)$

b) Die Zufallsvariable Z gibt die Anzahl der Versuche an. Die Zufallsvariable Z für die Anzahl infizierter Personen ist $B_{20;p}$ –verteilt. Gesucht ist p für $E(Z) = 10$.

GTR-Einstellungen

Y1: $21 - 20 * binompdf(20, X, 0)$

Y2: 10

Klausuraufschrieb

a) X für die Anzahl infizierter Personen ist $B_{20;0,05}$ –verteilt.
Globaler Test:

$B_{20;0,05}(X=0) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}3585$

Weitere Tests für $X \neq 0$

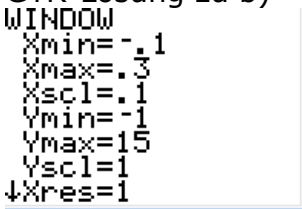
$B_{20;0,05}(X \geq 1) = 1 - B_{20;0,05}(X=0) = 0{,}6415$

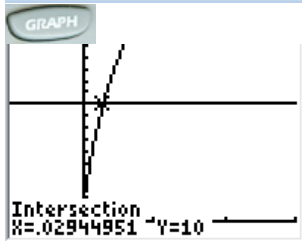
Sei Z die Anzahl durchzuführender Tests, dann gilt:

$E(Z) = 1 \cdot B_{20;0,05}(X=0) + 21 \cdot B_{20;0,05}(X \geq 1) = 1 \cdot 0{,}3585 + 2$

Man muss durchschnittlich mit etwa 14 *Tests pro Gruppe rechnen.*

GTR-Lösung zu b)





b) Gesucht: p für $E(Z) = 10$ mit $Z \quad B_{20;p}$ –verteilt.

$B_{20;p}(Z=1) = B_{20;p}(Z=0)$

$B_{20;p}(Z=21) = B_{20;p}(Z \geq 1) = 1 - B_{20;p}(Z=0)$

$E(Z) = B_{20;p}(Z=0) + 21 - 21 \cdot B_{20;p}(Z=0)$

$E(Z) = 21 - 20 \cdot B_{20;p}(Z=0) = 10$

$p \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}02945 \approx 2{,}9\,\%$ für $E(Z) = 10$

Wenn der Anteil der infizierten, aber noch nicht erkrankten Personen etwa $2{,}9\,\%$ *beträgt, sind durchschnittlich* 10 *Tests pro Gruppe zu erwarten.*

Lösung A11

Lösungslogik

a) Eine Fehlentscheidung liegt dann vor, wenn ein intakter Rasierapparat nicht zum Verkauf freigegeben wird, bzw. ein defekter Rasierapparat zum Verkauf freigegeben wird. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit entsprechend den Pfadregeln.

b) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der zum Verkauf freigegebenen Geräte an und ist $B_{10000;0,936}$ –verteilt. Gesucht ist $E(X)$.
Die Anzahl der tatsächlich freigegebenen Geräte weicht um höchstens 25 von $E(X)$ ab, wenn sie mindestens $E(X) - 25$ und höchstens $E(X) + 25$ beträgt.

Klausuraufschrieb

a) Bestimmung der Elementarereignisse:

R: "Rasierapparat intakt"

$\overline{R}$: "Rasierapparat defekt"

V: "Zum Verkauf freigegeben"

$\overline{V}$: "Nicht zum Verkauf freigegeben"

Vierfeldertafel:

	R	$\overline{R}$	
V	$0{,}94 \cdot 0{,}99$	$0{,}06 \cdot 0{,}09$	$0{,}936$
$\overline{V}$	$0{,}94 \cdot 0{,}01$	$0{,}06 \cdot 0{,}91$	$0{,}064$
	$0{,}94$	$0{,}06$	1

$P(R\overline{V} \cup \overline{R}V) = 0{,}94 \cdot 0{,}01 + 0{,}06 \cdot 0{,}09 = 0{,}0148$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $1{,}5\,\%$ *kommt es bei der Überprüfung eines Rasierapparates zu einer Fehlentscheidung.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) Das Gegenereignis von a) ist die Wahrscheinlichkeit für die Freigabe eines Rasierapparates, also $p = 1 - 0{,}0148 = 0{,}936$.
$E(X) = 10000 \cdot 0{,}936 = 9360$
Man kann mit einer Freigabe von 9360 *von* 10000 *Rasierapparaten rechnen.*
Wahrscheinlichkeit der Abweichung:
Intervall der Abweichung ist $[E(X) - 25; E(X) + 25] = [9335; 9385]$
X ist $B_{10000;0{,}936}$–verteilt.

$$B_{10000;0{,}936}(9335 \leq X \leq 9385) = B_{10000;0{,}936}(X \leq 9385) - B_{10000;0{,}936}(X \leq 9334) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}7026 \approx 70{,}3\,\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $70{,}3\,\%$ *weicht die Anzahl der zum Verkauf freigegebenen Rasierapparate um höchstens* 25 *von* 9360 *ab.*

Dieses Dokument ist noch im Aufbau

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

a) Die Nullhypothese H_0: $p_0 = 0{,}6$ soll gegen die Alternativhypothese H_1: $p_1 > 0{,}6$ bei einem Stichprobenumfang $n = 100$ und einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 2\,\%$ getestet werden.
Bestimme den Ablehnungsbereich.

b) Die Nullhypothese H_0: $p_0 = 0{,}4$ soll gegen die Alternativhypothese H_1: $p_1 < 0{,}4$ bei einem Stichprobenumfang $n = 200$ und einem Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$ getestet werden.
Bestimme den Ablehnungsbereich.

Aufgabe A2

Ein Fußballspieler behauptet, beim Elfmeterschießen eine Trefferquote von $95\,\%$ zu erreichen. Um seiner Behauptung zu untermauern, schießt er 50 Elfmeter.

a) Wie viele Treffer muss er erzielen, damit seine Behauptung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% glaubhaft ist?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit irrt man, wenn seine Behauptung bei 45 Treffern verworfen wird?

Aufgabe A3

Eine Person behauptet, hellseherische Fähigkeiten zu haben. Um die Aussage zu überprüfen, wird 1000 mal gewürfelt und die Person muss die richtige Augenzahl vorhersagen. Wie viele richtige Vorhersagen muss die Person machen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von $99{,}5\,\%$ diese Fähigkeiten tatsächlich akzeptiert werden?

Aufgabe A4

Auf einer Straße überschritten bisher $25\,\%$ der Fahrer die zulässige Höchstgeschwindigkeit. Nachdem zusätzliche Warnschilder angebracht wurden, konnte man beobachten, dass von 100 Fahrern nur noch 17 zu schnell unterwegs waren.

a) Kann man mit $95\,\%$-iger Sicherheit davon ausgehen, dass die Maßnahme Erfolg hatte?

b) Wie viele Fahrer hätten höchstens zu schnell fahren dürfen, um mit mindestens $98\,\%$-iger Sicherheit von einer Abnahme der Raserei sprechen zu können?

Aufgabe A5

Ein Medikament A ist laut Untersuchungen in $98\,\%$ aller Fälle wirksam. Ein vergleichbares, aber günstigeres Medikament B darf nur dann auf den Markt gebracht werden, wenn es eine bessere Wirkung wie das Medikament A besitzt.

Das Medikament B wird an 300 Personen getestet. Bei wie vielen dieser Personen muss das Medikament B Wirkung zeigen, damit ihm mit einer Sicherheit von $95\,\%$ eine bessere Wirkung wie das Medikament A attestiert werden kann?

Lösung A1

Lösungslogik

a) Rechtsseitiger Test
GTR-Einstellung:
Y1: $1 - binomcdf(100, .6, X)$

b) Linksseitiger Test
GTR-Einstellung:
Y1: $binomcdf(200, .4, X)$

GTR-Ansicht zu a)

X	Y1
67	.09125
68	.0615
69	.03985
70	.02478
71	.01478
72	.00843
73	.0046

X=71

GTR-Ansicht zu b)

X	Y1
64	.01187
65	.01731
66	.02472
67	.03459
68	.04748
69	.0639
70	.0844

X=68

Klausuraufschrieb

a) H_0: $p_0 = 0{,}6$; H_1: $p_1 > 0{,}6$ $\alpha = 0{,}02$; $n = 100$
$p_1 > p_0 \Longrightarrow$ rechtsseitiger Test
$B_{100;0,6}(X \geq k) = 1 - B_{100;0,6}(X \leq k - 1) \leq 0{,}02$
$\overset{\text{GTR}}{k} = 71$
$\overline{A} = [71; 72; \ldots; 100]$

b) H_0: $p_0 = 0{,}4$; H_1: $p_1 < 0{,}4$ $\alpha = 0{,}05$; $n = 200$
$p_1 < p_0 \Longrightarrow$ linksseitiger Test
$B_{200;0,4}(X \leq k) \leq 0{,}05$
$\overset{\text{GTR}}{k} = 68$
$\overline{A} = [0; 1; \ldots; 68]$

Lösung A2

Lösungslogik

a) Linksseitiger Test
GTR-Einstellung:
Y1: $binomcdf(50, .95, X)$

b) Siehe Klausuraufschrieb

X	Y1
40	1.6E-4
41	7.6E-4
42	.00319
43	.01179
44	.03778
45	.10362
46	.23959

X=44

Klausuraufschrieb

a) H_0: $p_0 = 0{,}95$; H_1: $p_1 < 0{,}95$ $\alpha = 0{,}05$; $n = 50$
$p_1 < p_0 \Longrightarrow$ linksseitiger Test
$B_{50;0,95}(X \leq k) \leq 0{,}02$
$\overset{\text{GTR}}{k} = 44$
$\overline{A} = [0; 1; \ldots; 44]$
Der Spieler muss mindestens 45 *Treffer erzielen, damit seine Behauptung glaubhaft ist.*

b) $B_{50;0,95}(X \leq 45) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}1036$
Die Irrtumswahrscheinlichkeit für die Ablehnung bei 45 *Treffern beträgt etwa* $10{,}4\,\%$.

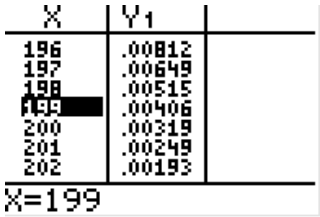
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A3

Lösungslogik

a) Die Wahrscheinlichkeit, die richtige Augenzahl beim Würfeln zu raten beträgt $p_0 = \frac{1}{6}$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, die falsche Augenzahl vorauszusagen $p_1 = \frac{5}{6}$.
Rechtseitiger Test
GTR-Einstellung:
Y1:$1 - binomcdf(1000, \frac{1}{6}, X - 1)$

Klausuraufschrieb



H_0: $p_0 = \frac{1}{6}$; H_1: $p_1 > \frac{1}{6}$; $n = 1000$
$p_1 > p_0 \Longrightarrow$ rechtsseitiger Test
$B_{1000;\frac{1}{6}}(X \geq k) = 1 - B_{1000;\frac{1}{6}}(X \leq k - 1) \leq 0{,}005$
$k \overset{GTR}{=} 199$
$\overline{A} = [199; 200; \ldots; 1000]$
Der Wahrsager muss mindestens 199 *richtige Voraussagen machen.*

Lösung A4

Lösungslogik

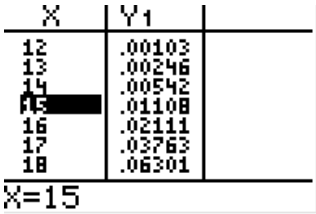
a) Wenn nur noch 17 Fahrer zu schnell unterwegs waren, dann haben mehr als 18 Fahrer die Geschwindigkeit eingehalten.

b) Linksseitiger Test
GTR-Einstellung:
Y1:$binomcdf(100, .25, X)$

Klausuraufschrieb

a) $B_{100;0{,}25}(X \geq 18) = 1 - B_{100;0{,}25}(X \leq 17) \overset{GTR}{\approx} 0{,}9624$
Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 17 *Fahrer die Geschwindigkeitsbegrenzung einhielten beträgt etwa* 96,2 %. *Man kann also mit* 95 %*-iger Sicherheit davon ausgehen dass die Maßnahme Erfolg hatte.*

b) H_0: $p_0 = 0{,}25$; H_1: $p_1 < 0{,}25$; $n = 100$; $\alpha = 0{,}02$
$p_1 < p_0 \Longrightarrow$ linksseitiger Test
$B_{100;0{,}25}(X \leq k) \leq 0{,}02$
$k \overset{GTR}{=} 15$
$\overline{A} = [0; 1; \ldots; 15]$
Es hätten höchstens 15 *Fahrer zu schnell fahren dürfen.*



Lösung A4

Lösungslogik

Rechtsseitiger Test
GTR-Einstellung:
Y1:$1 - binomcdf(300, .98, X)$

Klausuraufschrieb

H_0: $p_0 = 0{,}98$; H_1: $p_1 > 0{,}98$; $n = 300$; $\alpha = 0{,}05$

$p_1 > p_0 \Longrightarrow$ rechtsseitiger Test

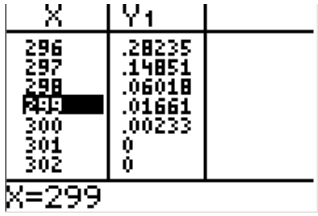
$B_{300;0,98}(X \geq k) = 1 - B_{300;0,98}(X \leq k-1) \leq 0{,}05$

GTR

$k = 299$

$\overline{A} = [299; 300]$

Das neue Medikament muss bei mindestens 299 *Personen Wirkung zeigen.*



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Eine Firma produziert und verkauft im großen Umfang T-Shirts in den Farben Schwarz, Weiß und Rot. Erfahrungsgemäß sind $40\,\%$ der verkauften T-Shirts schwarz, $35\,\%$ weiß und $25\,\%$ rot.

a) Es werden drei T-Shirts nacheinander verkauft.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
A: "Die drei T-Shirts haben verschiedene Farben"
B: "Mindestens eines der drei T-Shirts ist weiß oder rot"

b) Der Geschäftsführer der Firma hat den Verdacht, dass das Kaufinteresse an schwarzen T-Shirts nachgelassen hat. Zur Überprüfung seiner Vermutung kontrolliert er die nächsten 200 verkauften T-Shirts und stellt fest, dass davon 72 schwarz sind. Spricht dies bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens $5\,\%$ für die Vermutung des Geschäftsführers?

Aufgabe A2

Der Bekanntheitsgrad einer Sonnencreme in der Bevölkerung liegt bei $35\,\%$. Die Geschäftsleitung der Herstellerfirma verspricht ihrer Werbeabteilung eine Bonuszahlung, wenn sie es schafft, innerhalb eines Jahres den Bekanntheitsgrad der Creme zu steigern. Nach Ablauf des Jahres werden 100 Personen befragt.
Entwickle eine Entscheidungsregel für die Vergabe der Bonuszahlung bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens $5\,\%$.

Aufgabe A3

Bei einer größeren Gemeinde steht die Entscheidung für eine Umgehungsstraße an. Der Gemeinderat geht davon aus, dass höchstens $45\,\%$ der erwachsenen Einwohner der Gemeinde für das Projekt sind. Eine Bürgerinitiative für die Umgehungsstraße bezweifelt dies und führt eine Umfrage unter 200 erwachsenen Einwohnern durch. Dabei sprechen sich 110 der befragten Bürger für das Projekt aus.

a) Kann damit die Annahme des Gemeinderats abgelehnt werden, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens $5\,\%$ betragen soll?

b) Die Bürgerinitiative führt vor einem Einkaufszentrum eine Unterschriftenaktion durch. Wie hoch muss der Anteil p der Befürworter der Umgehungsstraße mindestens sein, damit sich unter 5 zufällig ausgewählten Kunden mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $99\,\%$ wenigstens ein Befürworter befindet?

Aufgabe A4

Eine Firma produziert Akkus, für die eine bestimmte Lebensdauer angegeben wird. Erfahrungsgemäß fällt ein Akku mit der Wahrscheinlichkeit p vorzeitig aus.

a) Wie groß darf p höchstens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $90\,\%$ höchstens 10 von 100 Akkus vorzeitig ausfallen?

b) Von Kundenseite wird der Verdacht geäußert, dass die Wahrscheinlichkeit für einen vorzeitigen Ausfall größer als $0{,}07$ ist. Daher wird die Hypothese $H_0: p \leq 0{,}07$ mit einer Stichprobe von 200 Akkus überprüft. Wenn davon mehr als 20 Akkus vorzeitig ausfallen, wird die Hypothese abgelehnt. Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit?

Aufgabe A5

Ein Chip-Hersteller gibt seinen Abnehmern die Garantie, dass seine Chips mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $10\,\%$ defekt sind.
Ein kritischer Abnehmer bezweifelt die Angabe des Herstellers und will diese mit einem Test anhand einer Stichprobe von 100 Chips auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ überprüfen. Als Nullhypothese nimmt er die Angabe des Herstellers.
Bestimme die zugehörige Entscheidungsregel.

Tatsächlich sind die Chips mit einer Wahrscheinlichkeit von $8\,\%$ defekt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird in diesem Fall bei obigem Test die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen?

Aufgabe A6

Eine Fluggesellschaft hat durch langfristige Umfragen festgestellt, dass $30\,\%$ ihrer Fluggäste mit der üblichen Verpflegung unzufrieden sind.

a) Mit wie vielen unzufriedenen Gästen muss die Fluggesellschaft in einem vollbesetzten Flugzeug mit 300 Plätzen rechnen?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird diese Zahl noch überschritten?

Die Geschäftsleitung der Fluggesellschaft erwägt, neben der üblichen Verpflegung gegen Zuschlag ein hochwertiges Menü anzubieten, sofern die Nachfrage groß genug ist. Wird das Menü allerdings angeboten und von zu wenigen Fluggästen in Anspruch genommen, entstehen der Fluggesellschaft finanzielle Verluste. Wird das Menü nicht angeboten, obwohl die Nachfrage groß genug ist, steigt die Unzufriedenheit unter den Fluggästen.

Als Entscheidungshilfe soll ein Test auf der Basis einer Umfrage unter 300 Fluggästen auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ durchgeführt werden.
Als Nullhypothesen stehen die folgenden Hypothesen zur Auswahl:
H_0: „Mindestens $20\,\%$ der Fluggäste würden das Menü wählen."
H_0^*: „Höchstens $20\,\%$ der Fluggäste würden das Menü wählen."

b) Für die Geschäftsleitung hat Vorrang, das Risiko auf einen finanziellen Verlust auf höchstens $5\,\%$ zu beschränken.
Welche der beiden Nullhypothesen sollte dann als Nullhypothese gewählt werden? Begründe deine Entscheidung.

c) Bestimme die zugehörige Entscheidungsregel.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

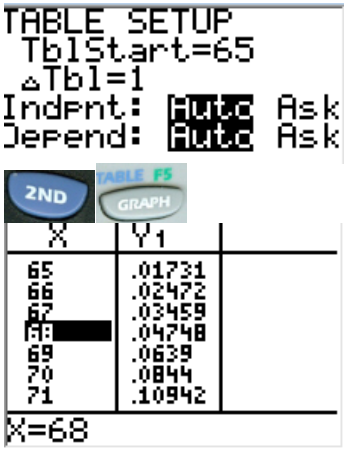
Lösungslogik

a) Wahrscheinlichkeit der Ereignisse gemäß den Pfadregeln.

b) Die Nullhypothese ist H_0: $p_0 = 0{,}4$, die Hypothese H_1: $p_1 < 0{,}4$ das Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$, der Stichprobenumfang $n = 200$. Es wird ein linksseitiger Test durchgeführt mit einem Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0; 1; 2; \dots k\}$.

GTR-Einstellungen:

Y1: $binomcdf(200, .4, X)$



Klausuraufschrieb

a) A: „Drei T-Shirts haben unterschiedliche Farben".
$P(A) = 3! \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}25 = 0{,}21 = 21\,\%$

B: „Mindestens eines der drei T-Shirts ist weiß oder rot".

$\overline{B}$: „Alle drei T-Shirts sind schwarz".
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}4^3 = 0{,}936 = 93{,}6\,\%$

b) H_0: $p_0 = 0{,}4$; $n = 200$; H_1: $p_1 < p_0$
Linksseitiger Test mit $\alpha = 0{,}05$; $\overline{A} = \{0; 1; 2; \dots k\}$

$B_{200;0,4}(X \le k) \le 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad k \overset{GTR}{=} 68$

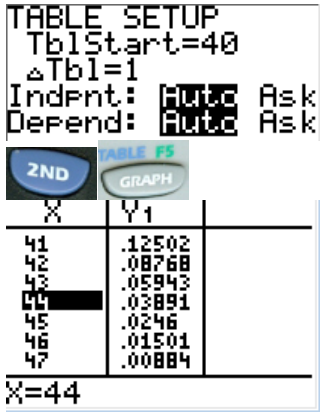
Wegen $k = 68 < 72$ spricht das Verkaufsergebnis nicht für ein nachlassendes Kaufinteresse an schwarzen T-Shirts. Die Vermutung des Geschäftsführers bestätigt sich nicht.

Lösung A2

Lösungslogik

Die Nullhypothese ist H_0: $p_0 = 0{,}35$, die Gegenhypothese H_1: $p_1 > 0{,}35$, das Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$, der Stichprobenumfang $n = 100$.
Rechtsseitiger Test mit einem Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{k; k+1; k+2; \dots 100k\}$ mit k als kleinster natürlicher Zahl. Der Ablehnungsbereich bestimmt hier, dass eine Bonuszahlung erfolgt.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Personen unter den 100 Befragten, die die Sonnencreme kennen. Die Nullhypothese ist $B_{100;0,35}$-verteilt.
GTR-Einstellungen

Y1: $1 - binomcdf(100, .35, X - 1)$



Klausuraufschrieb

H_0: $p_0 = 0{,}35$; $n = 100$, X ist $B_{100;0,35}$–verteilt.
Rechtsseitiger Test mit H_1: $p_1 > 0{,}35$; $\alpha = 0{,}05$
$\overline{A} = \{k; k+1; k+2; \dots k\}$

$B_{100;0,35}(X \ge k) = 1 - B_{100;0,35}(X \le k - 1) \le 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad k \overset{GTR}{=} 44$

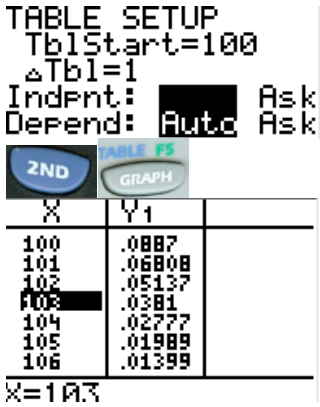
$\overline{A} = \{44; 45; 46; \dots 100\}$

Die Geschäftsleitung sollte die Bonusauszahlung an die Werbeabteilung nur dann zahlen, wenn mehr als 43 der 100 befragten Personen angeben, die Sonnencreme zu kennen.

Lösung A3

Lösungslogik

a) Die Nullhypothese ist H_0: $p_0 = 0{,}45$, die Hypothese H_1: $p_1 > 0{,}45$ das Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$, der Stichprobenumfang $n = 200$. Es wird ein rechtsseitiger Test durchgeführt mit einem Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{k; k+1; k+2; \ldots 200\}$ mit k als kleinster natürlicher Zahl.
X beschreibt die Anzahl der Personen unter den 200 Befragten, die für die Umgehungsstraße stimmen. Die Nullhypothese ist X $B_{200;0{,}45}$-verteilt.
GTR-Einstellungen
Y1: $1 - binomcdf(200, .45, X-1)$



b) Die Zufallsvariable X ist $B_{5;p}$–verteilt mit $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$.
Manuelle Ermittlung von p.

Klausuraufschrieb

a) H_0: $p_0 = 0{,}45$; $n = 200$, X ist $B_{200;0{,}45}$–verteilt.
Rechtsseitiger Test mit H_1: $p_1 > 0{,}45$; $\alpha = 0{,}05$
$\overline{A} = \{k; k+1; k+2; \ldots 200\}$
Gesucht $P(X \geq k) \leq 0{,}05$

$B_{200;0{,}45}(X \geq k) = 1 - B_{200;0{,}45}(X \leq k-1) \leq 0{,}05 \Rightarrow k \overset{\text{GTR}}{=} 103$
$\overline{A} = \{103; 104; 105; \ldots 200\}$
Da 110 (laut Aufgabenstellung) im Ablehnungsbereich liegt, kann die Annahme des Gemeinderats (auf dem Signifikanzniveau 5 %) abgelehnt werden.

Schneller (und einfacher)

$B_{200;0{,}45}(X \geq 110) = 1 - B_{200;0{,}45}(X \leq 109) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}00286 \approx 0{,}29\,\%$
Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist deutlich kleiner als das vorgegebene Signifikanzniveau von 5 %. Die Nullhypothese kann abgelehnt werden.

b) X ist $B_{5;p}$–verteilt. Gesucht wird p für $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$
$B_{5;p}(X \geq 1) = 1 - B_{5;p}(X = 0) \geq 0{,}99$
$1 - \binom{5}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^5 \geq 0{,}99$
$(1-p)^5 \leq 0{,}01 \quad | \quad \sqrt[5]{}$
$1 - p \leq 0{,}3981$
$p \geq 0{,}6019$
Der Anteil der Befürworter der Umgehungsstraße muss mindestens 60,2 % betragen, damit sich unter 5 zufällig ausgewählten Kunden mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % wenigstens ein Befürworter befindet.

Lösung A4

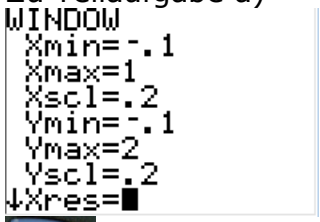
Lösungslogik

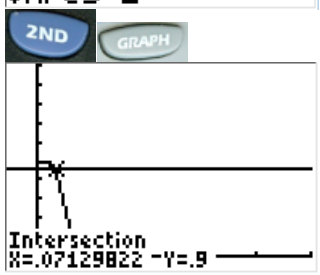
a) Die Zufallsvariable X ist $B_{100;p}$ –verteilt. Gesucht ist p für $B_{100;p}(X \leq 10) \geq 0{,}9$.
GTR-Einstellungen
Y1: $binomcdf(100, X, 10)$
Y2: 0,9

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) Die Nullhypothese ist H_0: $p_0 \leq 0{,}07$, die Gegenhypothese H_1: $p_1 > 0{,}07$ der Stichprobenumfang $n = 200$. Es wird ein rechtsseitiger Test durchgeführt mit einem Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{k; k+1; k+2; \dots 200\}$ mit k als kleinster natürlicher Zahl.
X gibt die Anzahl der Akkus unter 200 Stück an, die vorzeitig ausfallen. Die Nullhypothese ist X $B_{200;0{,}07}$-verteilt. Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn mehr als 20 Akkus vorzeitig ausfallen.
GTR-Einstellungen
Y1:$binomcdf(200{,}0.07, X)$

Zu Teilaufgabe a)





Klausuraufschrieb

a) X ist $B_{100;p}$–verteilt.
$B_{100;p}(X \leq 10) \geq 0{,}90$
$p \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}071$
Der Ausfallwahrscheinlichkeit für einen Akku darf höchstens $7{,}1\,\%$ betragen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $90\,\%$ höchstens 10 von 100 Akkus vorzeitig ausfallen.

b) H_0: $p_0 \leq 0{,}07$; $n = 200$, X ist $B_{200;0{,}07}$–verteilt.
Rechtsseitiger Test mit H_1: $p_1 > 0{,}07$; $\overline{A} = \{20; 21; \dots 200\}$
$B_{200;0{,}07}(X > 20) = 1 - B_{200;0{,}07}(X \leq 20) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}04183 \approx 4{,}2\,\%$
Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt ca. $4{,}2\,\%$.
(Fehler der 1. Art)

Lösung A5

Lösungslogik

Die Zufallsvariable X ist $B_{100;0{,}1}$ –verteilt.
GTR-Einstellungen Teil 1 der Aufgabe:
Y1:$1 - binomcdf(100, .1, X-1)$
GTR-Einstellungen Teil 2 der Aufgabe:
Y1:$1 - binomcdf(100, .08, X-1)$

Klausuraufschrieb

X ist $B_{100;0{,}1}$–verteilt.
H_0: $p_0 = 0{,}1$; H_1: $p_1 > 0{,}1, n = 100$; $\alpha = 0{,}05$
$p_1 > p_0 \Rightarrow$ rechtsseitiger Test
$B_{100;0{,}1}(X \geq k) = 1 - B_{100;0{,}1}(X \leq k-1) \leq 0{,}05$ mit $\overline{A} = [k; k+1; \dots 100]$
$k \overset{\text{GTR}}{=} 16$; $\overline{A} = [16; 17; \dots 100]$
Der Abnehmer wird die Nullhypothese des Herstellers ablehnen, wenn mehr als 15 Chips defekt sind.

Mit $B_{100;0{,}08}(X \geq k) = 1 - B_{100;0{,}08}(X \leq k-1) \leq 0{,}05$ ergibt sich $k \overset{\text{GTR}}{=} 14$ mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}02824$.
Mit den Ergebnissen aus dem ersten Test wird der Abnehmer die Nullhypothese mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von etwa $2{,}8\,\%$ ablehnen.

Lösung A6

Lösungslogik

a) Erwartungswert der Binomialverteilung mit $\mu = n \cdot p$.
Überschreitung über $B_{300;0,3}(X \geq \mu)$

b) Es ist die H_0–Hypothese und nicht die H_0^*–Hypothese.

c) Es muss gelten $B_{300;0,2}(X \geq k) \leq 0{,}05$.

Klausuraufschrieb

a) $\mu = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}3 = 90$
Die Fluggesellschaft muss im Durchschnitt mit 90 *unzufriedenen Gästen rechnen.*

$B_{300;0,3}(X \geq 90) = 1 - B_{300;0,3}(X \leq 89) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}5218$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $52{,}2\,\%$ wird diese Zahl noch überschritten.

b) Wenn zu wenig Passagiere das Menüangebot nutzen, macht die Fluggesellschaft Verlust, d.h., sie muss auf mindestens $20\,\%$ der Fluggäste prüfen, damit sie die Nullhypothese ablehnen kann, wenn zu wenige Fluggäste das Menüangebot nutzen würden.
Es ist somit die H_0–Hypothese anzuwenden und nicht die H_0^*–Hypothese.

c) $H_0: p_0 = 0{,}2;\ \ H_1:\ p_1 < 0{,}2;\ \ p_1 < p_0 \Longrightarrow$ linksseitiger Test
$n = 300;\ \ \alpha = 0{,}05$
$B_{300;0,2}(X \leq k) =\leq 0{,}05$ mit $\overline{A} = [0; 1; \ldots; k]$
$k \overset{\text{GTR}}{=} 48;\quad \overline{A} = [0; 1; \ldots; 48]$
Die Fluggesellschaft sollte das Menü nicht einführen, wenn weniger als 49 *Fluggäste das Menü wählen.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A7

Gib an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

a) Die Nullhypothese ist die Vermutung, die man testen möchte.

b) Durch den Test findet man heraus, ob die Nullhypothese wahr ist.

c) Wenn das Ergebnis der Stichprobe außerhalb des Annahmebereiches liegt, wird die Nullhypothese verworfen.

d) Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass man die Nullhypothese beibehält, obwohl sie falsch ist.

e) Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsvariable bei gültiger Nullhypothese in den Ablehnungsbereich fällt.

f) Das Signifikanzniveau gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Nullhypothese falsch ist.

Aufgabe A8

Lina hat im Internet gelesen, dass beim Werfen eines Reißnagels die Wahrscheinlichkeit, dass er mit der Spitze nach oben landet, $80\,\%$ beträgt. Sie glaubt, dass dieser Wert zu hoch ist. Um dies zu überprüfen, führt sie einen Signifikanztest mit einem Stichprobenumfang von 200 und einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ durch. Bestimme den Ablehnungsbereich des Tests sowie die tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit.

Aufgabe A9

Ein Unternehmen bezieht Metallteile von einem Zulieferer. Laut Liefervertrag kann das Unternehmen die Lieferung ablehnen, wenn mehr als $2\,\%$ der Teile defekt sind. Das Unternehmen glaubt bei einer Lieferung, dass es mehr sind. Es führt einen Signifikanztest mit einem Stichprobenumfang von 400 und einem Signifikanztest von $5\,\%$ durch.

a) Bestimme die Null- und Alternativhypothese und den Annahmebereich des Tests.

b) Welche Entscheidung trifft das Unternehmen, wenn bei der Stichprobe 12 Teile defekt sind?

Aufgabe A10

Nach einer Umfrage sind $85\,\%$ der Deutschen für ein Tempolimit auf Autobahnen. Ein Automobilclub bezweifelt dies und behauptet, dass es in Wirklichkeit weniger sind. Eine Umweltorganisation glaubt dagegen, dass es noch mehr sind.

Beide wollen mithilfe eines Signifikanztests die Nullhypothese $H_0: p = 0{,}85$ testen. Der Stichprobenumfang soll 2000 und das Signifikanzniveau $5\,\%$ betragen.

a) Gib die Alternativhypothese und den Annahmebereich des Tests an, den der Automobilclub durchführt.

b) Gib die entsprechenden Antworten für den Test der Umweltorganisation.

c) Bei welchen der folgenden Stichprobenergebnissen verwerfen der Automobilclub bzw. die Umweltorganisation die Nullhypothese?

A: 1600 B: 1674 C: 1700 D: 1750 E: 1800

d) Gibt es ein Stichprobenergebnis, bei dem beide die Nullhypothese verwerfen? Begründe deine Antwort.

Lösung A7

Klausuraufschrieb

a) Die Aussage ist falsch. Mit dem Hypothesentest wird die Vermutung der Alternativhypothese (H_1) getestet.
b) Die Aussage ist falsch. Man kann durch den Test nicht herausfinden, ob die Nullhypothese richtig oder falsch ist.
c) Die Aussage ist richtig. Dies ist das Prinzip des Annehme- bzw. Ablehnungsbereichs.
d) Die Aussage ist falsch. Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der man die Nullhypothese verwirft, obwohl sie richtig ist (Fehler der 1. Art).
e) Die Aussage ist richtig.
f) Die Aussage ist falsch. Das Signifikanzniveau ist die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit dafür, dass man die Nullhypothese verwirft, obwohl sie richtig ist (Fehler der 1. Art).

Lösung A8

Lösungslogik

Die Nullhypothese ist H_0: $p_0 = 0{,}8$, die Gegenhypothese H_1: $p_1 < 0{,}8$, das Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$, der Stichprobenumfang $n = 200$.
Linksseitiger Test mit einem Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0; 1; 2; \ldots; k\}$ mit k als größter natürlicher Zahl.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Reißnägel, die mit der Spitze nach oben landen und ist $B_{200;0{,}8}$-verteilt.
GTR-Einstellungen
Y1:$binomcdf(200, .8, X)$

Klausuraufschrieb

H_0: $p_0 = 0{,}8$; $n = 200$, X ist $B_{200;0{,}8}$–verteilt.
Linksseitiger Test mit H_1: $p_1 < 0{,}8$; $\alpha = 0{,}05$
$\overline{A} = \{0; 1; 2; \ldots; k\}$

$B_{200;0{,}8}(X \leq k) \leq 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad k \overset{\text{GTR}}{=} 150$
$\overline{A} = \{0; 1; 2; \ldots; 150\}$

$B_{200;0{,}8}(X \leq 150) \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}04935$
Wenn höchstens Reißnägel mit der Spitze nach oben fallen, wird die Nullhypothese abgelehnt. Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt dann etwa $4.9\,\%$.

Lösung A9

Lösungslogik

Die Nullhypothese ist H_0: $p_0 = 0{,}02$, die Gegenhypothese H_1: $p_1 > 0{,}02$, das Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$, der Stichprobenumfang $n = 400$.
Rechtsseitiger Test mit einem Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{k; k+1; k+2; \ldots; 400\}$ mit k als kleinster natürlicher Zahl.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Metallteile, die defekt sind und ist $B_{400;0{,}02}$-verteilt.
GTR-Einstellungen
Y1:$1 - binomcdf(400, .02, X - 1)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrieb

a) H_0: $p_0 = 0{,}02$; $n = 400$, X ist $B_{400;0{,}02}$–verteilt.
Rechtsseitiger Test mit H_1: $p_1 > 0{,}02$; $\alpha = 0{,}05$; $\overline{A} = \{k; k+1; k+2; \dots; 400\}$

$B_{400;0{,}02}(X \geq k) = 1 - B_{400;0{,}02}(X \leq k-1) \leq 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad k \overset{\text{GTR}}{=} 14$

$\overline{A} = \{14; 15; 16; \dots; 400\} \qquad A = \{0; 1; 2; \dots; 13\}$

b) Wenn bei der Stichprobe 12 Teile defekt sind, wird das Unternehmen die Nullhypothese annehmen. Die Irrtumswahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese dennoch nicht stimmt beträgt dann etwa $3{,}3\,\%$ (Fehler der 2. Art).

Lösung A10

Lösungslogik

Die Nullhypothese ist sowohl für den Automobilclub als auch für die Umweltorganisation H_0: $p_0 = 0{,}85$. In beiden Fällen wird eine Stichprobe unter Autofahrern mit einem Signifikanzniveau von durchgeführt.

a) Der Automobilclub glaubt, dass es weniger als $85\,\%$ sind. Somit ist die Gegenhypothese H_1: $p_1 < 0{,}85$. Dies führt zu einem linksseitigen Test.
GTR-Einstellungen
Y1:$binomcdf(2000, .85, X)$

b) Der Umweltorganisation glaubt, dass es mehr als $85\,\%$ sind. Somit ist die Gegenhypothese H_1: $p_1 > 0{,}85$. Dies führt zu einem rechtsseitigen Test.
GTR-Einstellungen
Y1:$1 - binomcdf(2000, .85, X - 1)$.

Klausuraufschrieb

a) H_0: $p_0 = 0{,}85$; $n = 2000$, X ist $B_{2000;0{,}85}$–verteilt.
Linksseitiger Test mit H_1: $p_1 < 0{,}85$; $\alpha = 0{,}05$
$\overline{A} = \{0; 1; 2; \dots; k\}$

$B_{2000;0{,}85}(X \leq k) \leq 0{,}05 \Longrightarrow k \overset{\text{GTR}}{=} 1673$

$\overline{A} = \{0; 1; 2; \dots; 1673\}; \quad A = \{1674; 1675; 1676; \dots; 2000\}$

b) H_0: $p_0 = 0{,}85$; $n = 2000$, X ist $B_{2000;0{,}85}$–verteilt.
Rechtsseitiger Test mit H_1: $p_1 > 0{,}85$; $\alpha = 0{,}05$
$\overline{A} = \{k; k+1; k+2; \dots; 2000\}$

$B_{2000;0{,}85}(X \geq k) = 1 - B_{2000;0{,}85}(X \leq k-1) \leq 0{,}05 \Longrightarrow k \overset{\text{GTR}}{=} 1727$

$\overline{A} = \{1727; 1728; 1729; \dots; 2000\}; \quad A = \{0; 1; 2; \dots; 1726\}$

c) A: 1600 : Liegt im Ablehnungsbereich des Automobilclubs.
B: 1674 : Liegt im Annahmebereich sowohl des Automobilclubs als auch der Umweltorganisation.
C: 1700 : Liegt im Annahmebereich sowohl des Automobilclubs als auch der Umweltorganisation.
D: 1750 : Liegt im Ablehnungsbereich der Umweltorganisation.
E: 1750 : Liegt im Ablehnungsbereich der Umweltorganisation.
Der Automobilclub bzw. die Umweltorganisation verwerfen die Nullhypothese bei den Ergebnissen A, D und E.

d) Es gibt kein Stichprobenergebnis, bei dem beide Organisationen die Nullhypothese verwerfen, da sich die beiden Ablehnungsbereiche nicht überschneiden (was auch logisch nicht möglich wäre).

Aufgabe A1

Die erfolgreiche Samstagabend-Fernsehshow „Verstehen Sie Mathe?" ist neu überarbeitet worden. Bisher erreichte sie Einschaltquoten von bis zu $20\,\%$. Mit der neuen Ausrichtung soll diese Quote gesteigert werden. Andernfalls soll zum alten Konzept zurückgekehrt werden.

Nach der Ausstrahlung werden in einer Umfrage 150 Menschen befragt, ob sie die Show mitverfolgt haben. 36 der Befragten bejahen dies.

Der verantwortliche Produzent ist sich der Zufälligkeit der Auswahl bei dieser Stichprobe bewusst und akzeptiert einen Fehler von $5\,\%$.

Kann er mit dem Ergebnis die Nullhypothese „die Quote bleibt unverändert" verwerfen? Bestimme den Ablehnungsbereich.

Aufgabe A2

Der Mathelehrer Dr. Müller behauptet, dass höchstens $8\,\%$ seiner Schüler im Abitur unter fünf Punkten abschneiden.

Die Kursstufe 2 möchte diese Behauptung mit ihren Abiturergebnissen überprüfen. Sie einigen sich auf einen Fehler von $7\,\%$. Tatsächlich schreiben drei von 28 Schüler bzw. Schülerinnen schlechter als fünf Punkte.

Aufgabe A3

Bei einem ausgesuchten Hotel einer internationalen Kette wurde der Frühstücksraum aufwendig modernisiert und das Angebot erweitert. Bevor die kostspieligen Maßnahmen auch in anderen Hotels der Kette durchgeführt werden, soll auf Grundlage eines Hypothesentests ermittelt werden, ob die Zufriedenheit der Gäste beim Frühstück gestiegen ist. Bisher erhielt das Hotel in diesem Bereich eine $90\,\%$-ige Zustimmung. Die Geschäftsführung legt sich bei der Entscheidungsregel auf ein Signifikanzniveau von $10\,\%$ fest.

Bei der Stichprobe aus 80 zufällig ausgewählten Gästen geben 76 Gäste an, mit dem Frühstücksangebot zufrieden zu sein. Wie entscheidet sich das Management? Interpretiere den Fehler $1.$ Art im Sachzusammenhang. Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit?

Aufgabe A4

Am Clara-Schumann-Gymnasium werden jedes Jahr am Nikolaustag für Schüler und Lehrer „Weckmänner" gebacken. Die Küche behauptet: „$80\,\%$ der Weckmänner haben ein Größe von mindestens $20\,cm$".

Diese Behauptung wird von der Schulleitung stolz im Elternbrief verkündet. Die Schülerinnen und Schüler der Kursstufe zweifeln an der Richtigkeit dieser Aussage, die Schulleitung hingegen behautet, der Prozentsatz sei sogar noch höher.

Beide Seiten möchten die Gültigkeit ihrer Behauptung mit einer Stichprobe untermauern. Man einigt sich darauf, 20 Exemplaren zu prüfen bei einem Signifikanzniveau von $5\,\%$. Berechne den Annahmebereich und interpretiere das Ergebnis.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Klausuraufschrieb

H_0: $p_0 = 0{,}2$; $H_1: p_1 > 0{,}2$ $\alpha = 0{,}02$; $n = 150$

$p_1 > p_0 \Longrightarrow$ rechtsseitiger Test

$B_{150;0,2}(X \geq k) = 1 - B_{150;0,2}(X \leq k-1) \leq 0{,}05$

GTR

$k = 39$

$\overline{A} = [39; 40; \ldots; 150]$

Da nur 36 *der Befragten die Sendung gesehen haben und* 36 *im Annahmebereich des Tests liegt, kann der Produzent die Nullhypothese nicht ablehnen.*

Lösung A2

Klausuraufschrieb

H_0: $p_0 = 0{,}08$; $H_1: p_1 > 0{,}08$ $\alpha = 0{,}07$; $n = 28$

$p_1 > p_0 \Longrightarrow$ rechtsseitiger Test

$B_{28;0,08}(X \geq k) = 1 - B_{28;0,08}(X \leq k-1) \leq 0{,}07$

GTR

$k = 5$

$\overline{A} = [5; 6; \ldots; 28]$

Da nur 3 *Schüler bzw. Schülerinnen schlechter als* 5 *Punkte geschrieben haben, kann die Nullhypothese hier nicht verworfen werden. Der Mathelehrer hat recht.*

Lösung A3

Lösungslogik

Obwohl im Aufgabentext nicht explicit angeführt, muss hier auf eine höhere Zustimmung als nur $90\,\%$ geprüft werden, ansonsten wäre die Überlegung, kostspielige Modernisierungsmaßnahmen durchzuführen, sinnlos.

Klausuraufschrieb

H_0: $p_0 = 0{,}90$; $H_1: p_1 > 0{,}9$ $\alpha = 0{,}1$; $n = 80$

$p_1 > p_0 \Longrightarrow$ rechtsseitiger Test

$B_{80;0,9}(X \geq k) = 1 - B_{80;0,9}(X \leq kl-1) \leq 0{,}1$

GTR

$k = 77$

$\overline{A} = [77; 78; \ldots; 80]$

Da nur 76 *Gäste angegeben haben, mit dem Frühstück zufrieden gewesen zu sein, kann die Geschäftsleitung die Nullhypothese nicht verwerfen. Die Irrtumswahrscheinlichkeit, die Gegenhypothese in diesem Falle zu verwerfen, beträgt etwa* $3{,}5\,\%$.

Ein Fehler der 1. Art kann in diesem Zusammenhang nicht gemacht werden, denn eine fälschlicherweise verworfene Gegenhypothese ist der Fehler der 2. Art.

Lösung A4

Lösungslogik

Da hier zwei gegensätzliche Aussagen vorliegen, ist ein zweiseitiger Test durchzuführen, bei dem das Signifikanzniveau halbiert werden muss.

Klausuraufschrieb

H_0: $p_0 = 0{,}80$; $H_1: p_1 < 0{,}8$; $H_2: p_2 > 0{,}8$ $\alpha = 0{,}1$; $n = 20$

$p_1 < p_0 \Longrightarrow$ linksseitiger Test

$B_{20;0,8}(X \leq k) \leq 0{,}05$

$\overset{\text{GTR}}{k} = 12$

$\overline{A_1} = [12]$

$p_2 > p_0 \Longrightarrow$ rechtsseitiger Test

$B_{20;0,8}(X \geq k) = 1 - B_{20;0,8}(X \leq kl - 1) \leq 0{,}05$

$\overset{\text{GTR}}{k} = 20$

$\overline{A_2} = [20]$

Aus den beiden Ablehnungsbereichen ergibt sich der Annahmebereich zu:

$A = [13; 14; 15; \ldots; 19]$

Interpretation:

Um die Gegenhypothese der Schulleitung anzunehmen, müssten alle 20 *Exemplare größer sein als* $20\,cm$*. Bei höchstens* 12 *Exemplaren kleiner als* $20\,cm$ *hätten die Schülerinnen und Schüler der Kursstufe recht.*

Insgesamt gesehen ist dieser Test nicht repräsentativ und jegliche Entscheidung zur Nullhypothese bzw. den beiden Gegenhypothesen ist mit hohem Risiko verbunden, da hier das empirische Gesetz der großen Zahlen nicht eingehalten wird, weil der Stichprobenumfang mit 20 *Weckmännern zu gering ist.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de