# Analytische Geometrie | Vektorgeometrie – Training - Aufgabenblatt 02

Dokument mit 10 Aufgaben

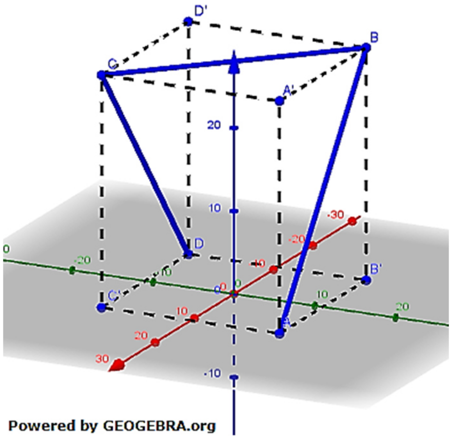
## Aufgabe A1

Das Saarpolygon.

Abbildung 1

Von Markscheider - Eigenes Werk, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=51774114

Abbildung 2




Die Abbildung 1 zeigt das sogenannte Saarpolygon, ein im Inneren begehbares Denkmal zur Erinnerung an den stillgelegten Kohlebergbau im Saarland. Das Saarpolygon kann in einem Koordinatensystem modellhaft durch den Streckenzug dargestellt werden, der aus den drei Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ mit $A(11|11|0)$, $B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$ und $A(-11|-11|0)$ besteht (vgl. Abbildung 2).

$A$, $B$, $C$ und $D$ sind die Eckpunkte eines Quaders. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a) Begründe, dass das Punkte $B$ und $C$ symmetrisch bezüglich der $x_3$-Achse liegen.

b) Berechne die Länge des Streckenzuges in Wirklichkeit.

Im Punkt $S(1|2|6)$ wird von einer Firma ein Scheinwerfer installiert, der die Strecke $\overline{BC}$ des Saarpolygons von unten anstrahlt. Die Firma behauptet, dass der Scheinwerfer $22\,m$ von der Strecke $\overline{BC}$ entfernt aufgestellt wurde.

c) Beurteile die Aussage der Firma durch geeignete Rechnungen.

Die Ebene $E$ enthält die Punkte $A, B$ und $C$, die Ebene $F$ die Punkte $B$, $C$ und $D$.

d) Bestimme eine Gleichung von $E$ in Koordinatenform.
(Zur Kontrolle: $14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$)

e) Berechne die Größe $\alpha$ des Winkels, unter dem die Ebene $E$ die $x_1x_2$-Ebene schneidet. Gib einen Term an, mit dem man aus $\alpha$ die Größe des Winkels zwischen den Ebenen $E$ und $F$ berechnen kann.

f) Die Ebene $E$ ist Teil einer Ebenenschar $E_a$: $14x_1 + 14x_2 + ax_3 = 308;\ a \in \mathbb{R}$. Begründe, dass der Punkt $P(14|8|0)$ zu allen Ebenen der Schar gehört und weise nach, dass die Ebenenschar auch durch die Parametergleichung $E_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6-a \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -13 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix};\ r,s \in \mathbb{R}$ beschrieben werden kann.

g) Das Saarpolygon wird aus verschiedenen Blickrichtungen betrachtet. Die Abbildungen 3 und 4 stellen das Saarpolygon für zwei Blickrichtungen schematisch dar. Gib zu jeder der beiden Abbildungen 3 und 4 einen möglichen Vektor an, der die zugehörige Blickrichtung beschreibt.
Stelle das Saarpolygon schematisch für eine Betrachtung von oben dar.

Abbildung 3

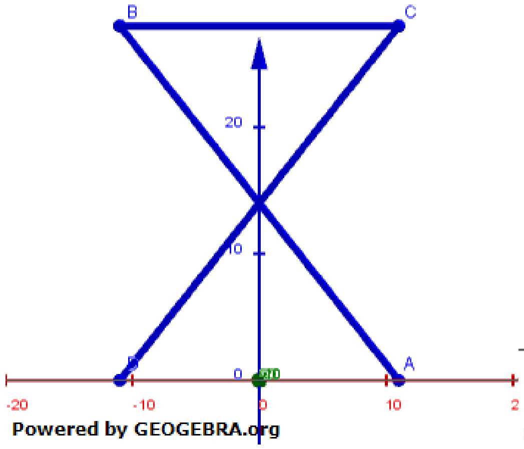
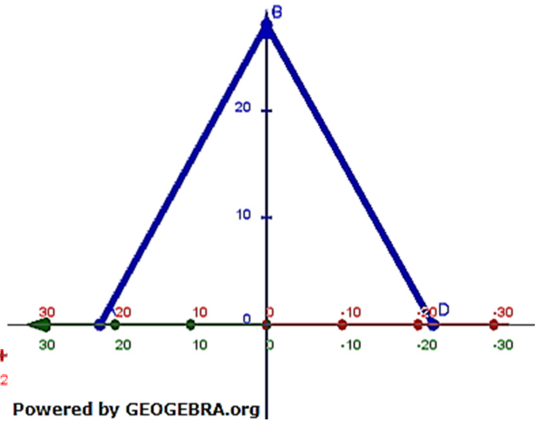



Abbildung 4




Der Punkt $M(3|4|12)$ ist Mittelpunkt eines kugelförmigen Luftballons mit einem Durchmesser von $5\,m$, der zur Dekoration autgehangen wird.

h) Gib die entsprechende Kugelgleichung zum Luftballon an.

i) Der kugelförmige Luftballon ist Teil einer Kugelschar mit den Mittelpunkten $M_a(3a|4a|12a)$ $a \in \mathbb{R}$. Begründe, dass alle Mittelpunkte auf einer Geraden liegen.

j) Die Gerade aus Teilaufgabe i) und die Gerade, welche die Strecke $\overline{BC}$ enthält, haben keinen Schnittpunkt. Erläutere unter Nutzung von Fachbegriffen (und OHNE konkrete Rechnungen) ein Vorgehen, um den Abstand dieser beiden Geraden zu ermitteln.

.

Analytische Geometrie | Vektorgeometrie – Training - Aufgabenblatt 02

## Lösung A1

a) Die Strecke $\overline{BC}$ ist die Diagonale des oberen Quaderrechtecks $A'BCD'$. Die
$x_3$-Achse schneidet diese Diagonale in der Mitte (s. Abbildung 2 Aufgabenstellung). Somit ist $B$ punktsymmetrisch zu diesem Schnittpunkt und damit die Punkte $B$ und $C$ punktsymmetrisch zur $x_3$-Achse.

b) Gesamtlänge $l$ des Streckenzuges:

$$l = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CD}|$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} -11-11 \\ 11-11 \\ 28-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{22^2 + 0^2 + 28^2} = 35{,}61$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0C} - \overrightarrow{0B} = \begin{pmatrix} 11-(-11) \\ -11-11 \\ 28-28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{22^2 + 22^2 + 0^2} = 31{,}11$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0D} - \overrightarrow{0C} = \begin{pmatrix} -11-11 \\ -11-(-11) \\ 0-28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{22^2 + 0^2 + 28^2} = 35{,}61$$

$$l = 35{,}61 + 31{,}11 + 35{,}61 = 102{,}33\,LE = 102{,}33\,m$$

Die Gesamtlänge des Streckenzuges beträgt etwa $102\,m$.

c) Gesucht ist $d(S;g)$ mit $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ 28 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $S(1|2|6)$

Elegante Lösung:

$d(S;g) = \frac{|\overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}$ mit $\overrightarrow{SB}$ als Verbindungsvektor zwischen Punkt $S$ und $B$ sowie $\overrightarrow{BC}$ als Richtungsvektor der Geraden durch $B$ und $C$

$$\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} -11-1 \\ 11-2 \\ 28-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 22 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 484 \\ 484 \\ 66 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \cancel{-12} & \cancel{22} \\ 9 & -22 \\ 22 & 0 \\ -12 & 22 \\ 9 & -22 \\ \cancel{22} & \cancel{0} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 9 \cdot 0 - 22 \cdot (-22 \\ 22 \cdot 22 - (-12) \cdot 0 \\ -12 \cdot (-22) - 9 \cdot 22 \end{pmatrix}$$

$$d(S;g) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 22 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 484 \\ 484 \\ 66 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}$$

$$d(S;g) = \frac{\sqrt{484^2 + 484^2 + 66^2}}{\sqrt{22^2 + 22^2}} = 22{,}10\,m$$

Die Aussage der Firma ist falsch.

*Analytische Geometrie | Vektorgeometrie – Training - Aufgabenblatt 02*

Umständliche Lösung:

Hilfsebene $H$ mit Richtungsvektor von g als Normalenvektor:

$H\colon\ x_1 - x_2 = d$

Punkt $S$ in $H$ einsetzen:

$S \to H$:

$H\colon\ 1 - 2 = d$ ➔ d=-1

$H\colon\ x_1 - x_2 = -1$

Hilfsebene $H$ mit $g$ schneiden

$H \cap g$

$x_1 = -11 + r$

$x_2 = 11 - r$

$-11 + r - (11 - r) = -1$

$-22 + 2r = -1$

$2r = 21$

$r = 11{,}5$

$r \to g$:

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ 28 \end{pmatrix} + 11{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$d(S; g) = |\overrightarrow{SL}|$

$$\overrightarrow{SL} = \overrightarrow{0L} - \overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 0{,}5 - 1 \\ -0{,}5 - 2 \\ 28 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -2{,}5 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{SL}| = \sqrt{0{,}5^2 + 2{,}5^2 + 22^2} = 22{,}15$$

Die Aussage der Firma ist falsch.

d) Für eine Ebene in Koordinatenform benötigen wir einen Normalenvektor.

$$k \cdot \overrightarrow{n_e} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 - 11 \\ -11 - 11 \\ 28 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -22 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$= 22 \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 28 \\ 22 \end{pmatrix} = 44 \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_e} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ 14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = d$

$A \to E$

$14 \cdot 11 + 14 \cdot 11 + 11 \cdot 0 = d$

$d = 308$

$E\colon\ 14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$

e) Winkel zwischen Ebene und Ebene über den $\cos(\alpha)$

$$\cos(\alpha)=\frac{|\overrightarrow{n_e}\circ\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_e}|\cdot|\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}14\\14\\11\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}14\\14\\11\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{11}{\sqrt{14^2+14^2+11^2}*\sqrt{1}}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{11}{\sqrt{513}}$$

$$\alpha=\cos^{-1}\frac{11}{\sqrt{513}}=60{,}9\,°$$

$$\cos(\alpha)=\frac{|\overrightarrow{n_E}\circ\overrightarrow{n_F}|}{|\overrightarrow{n_E}|\cdot|\overrightarrow{n_F}|}$$

Der Winkel zwischen Ebene $E$ und der $x_1x_2$-Ebene beträgt $60{,}9\,°$.
Aus Symmetriegründen (Punktsymmetrie) beträgt der Winkel zwischen Ebene $F$ und der $x_1x_2$-Ebene ebenfalls $60{,}9\,°$.

f) Ebenenschar $E_a$: $14x_1+14x_2+ax_3=308;\ a\in\mathbb{R}$.
Der Punkt $P(14|8|0)$ gehört zur Ebenenschar, da nur der Koeffizient der $x_3$-Koordinate den Parameter $a$ enthält und die $x_3$-Koordinate von $P$ gleich $0$ ist.
Nachweis der Parametergleichung:
Nachweis des Stützvektors $\begin{pmatrix}6\\16\\0\end{pmatrix}$:

$14\cdot6+14\cdot16+0=308$
$308=308$ ➔ $Q(6|16|0)\in E$

<u>Lösung umständlich:</u>

Bestimmung eines weiteren Punktes $R$ für Richtungsvektor $\begin{pmatrix}6-a\\-6\\14\end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR}$$
$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{RQ}$$
$$\overrightarrow{OR}=\begin{pmatrix}6\\16\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6-a\\-6\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\22\\-14\end{pmatrix}\ ➔\ R(a|22|-14)$$

Prüfung ob $R\in E$:
$14a+14\cdot22-14a=308$
$308=308$ ➔ $R\in E$

Bestimmung eines weiteren Punktes $S$ für Richtungsvektor $\begin{pmatrix}-13\\13\\0\end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{SQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OS}$$
$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{SQ}$$
$$\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}6\\16\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-13\\13\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\3\\0\end{pmatrix}\ ➔\ S(19|3|0)$$

Prüfung ob $S\in E$:
$14\cdot19+14\cdot3-0=308$
$308=308$ ➔ $S\in E$

*Analytische Geometrie | Vektorgeometrie – Training - Aufgabenblatt 02*

Lösung elegant:

Bestimmung des Normalenvektors von $E$ über das Vektorprodukt der gegebenen Richtungsvektoren der Parametergleichung:

$$k \cdot \begin{pmatrix} 6-a \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -13 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{array}{cc} \cancel{6-a} & \cancel{-13} \\ -6 & 13 \\ 14 & 0 \\ 6-a & -13 \\ -6 & 13 \\ \cancel{14} & \cancel{0} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} -6 \cdot 0 - 14 \cdot 13 \\ 14 \cdot (-13) - (6-a) \cdot 0 \\ (6-a) \cdot 13 - (-6) \cdot (-13) \end{pmatrix}$$

$$(-13) \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ a \end{pmatrix}$$

$E\colon\ 14x_1 + 14x_2 + ax_3 = d$

$\begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow E:$

$14 \cdot 6 + 14 \cdot 16 + 0 = d$

$d = 308$

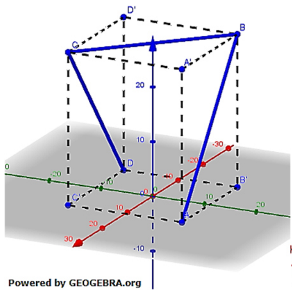
$E\colon\ 14x_1 + 14x_2 + ax_3 = 308$ **q.e.d.**

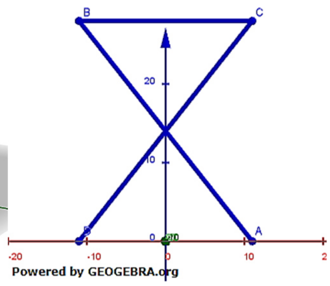
g) Abbildung 3:

Vom Polygon sieht man die obere Stange von links nach rechts verlaufend.
Die Blickrichtung ist somit senkrecht auf dem Vektor $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC} \circ \vec{u} = 0$

$$\begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 22 - 22 = 0$$



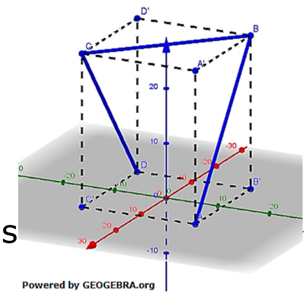



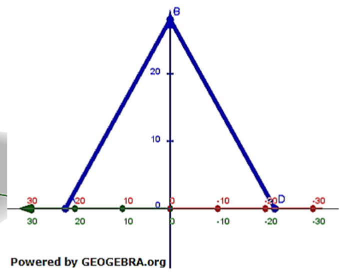

Die Blickrichtung gemäß Abbildung 3 ist in Richtung des Vektors

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alternativ $\overrightarrow{u^*} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Abbildung 4:

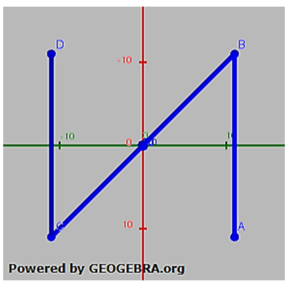
Vom Polygon sieht man die obere Stange nur als Punkt.
Die Blickrichtung ist somit in Richtung des Vektor $\overrightarrow{BC}$.
Die Blickrichtung gemäß Abbildung 4 ist in Richtung des Vektors




$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alternativ $\overrightarrow{u^*} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

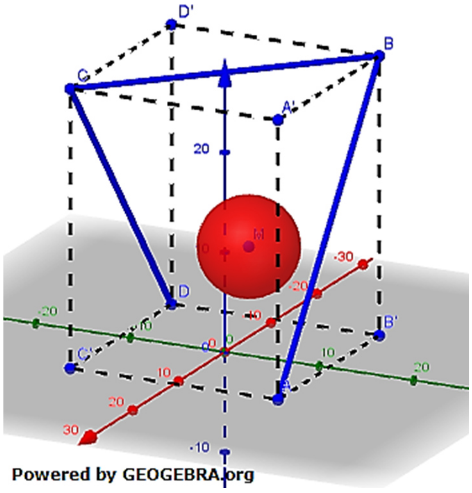
Polygondraufsicht:



Analytische Geometrie | Vektorgeometrie – Training - Aufgabenblatt 02

h) $K\colon\ \left(\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}\right)^2=25$

Alternativ:
$K\colon\ (x-3)^2+(y-4)^2+(z-12)^2=25$




i) $g\colon\ \vec{x}=\overrightarrow{OM}+r\cdot\overrightarrow{M_aM}$

$\overrightarrow{M_aM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_a}$

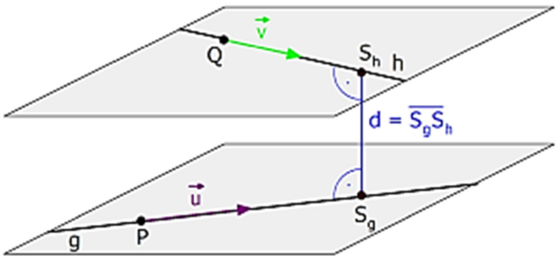
$\overrightarrow{M_aM}=\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3a\\4a\\12a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+3a\\4+4a\\12+12a\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{M_aM}=\begin{pmatrix}3(1+a)\\4(1+a)\\12(1+a)\end{pmatrix}=(1+a)\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}$

$g\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}+(1+a)\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren der Schargaraden sind ein Vielfaches voneinander, damit liegen alle Mittelpunkte auf der Geraden $g$.

j)
1. Wir stellen die laufenden Punkte $S_h$ und $S_g$ der beiden Geraden auf und bilden den Verbindungsvektor $\overrightarrow{S_hS_g}$.




2. Aus den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Geraden und dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{S_hS_g}$ stellen wir ein lineares Gleichungssystem auf über die Bedingungen, dass das Skalarprodukt aus $\vec{u}$ und $\overrightarrow{S_hS_g}$ als auch das aus $\vec{v}$ und $\overrightarrow{S_hS_g}$ gleich Null sein muss.
3. Wir lösen das aufgestellte Gleichungssystem zur Ermittlung der Lotfußpunkte $S_h$ und $S_g$ der kürzesten Verbindung zwischen $g$ und $h$.
4. Wir bestimmen den Abstand der beiden ermittelten Lotfußpunkte über den Betrag des Vektors $\overrightarrow{S_hS_g}$. Dieser Wert entspricht dem Abstand der beiden windschiefen Geraden.