Einleitung

Dass man Wurzeln nicht so ohne Weiteres addieren bzw. subtrahieren darf, haben wir im Kapitel „Addition und Subtraktion von Wurzeln" gesehen. Gelten die dort gemachten Einschränkungen aber auch für die Multiplikatioin bzw. Division? Dies sollen dir die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel:

Einerseits gilt:

$$\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}=3\cdot 4=12$$

$$\sqrt{16}:\sqrt{9}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}=\frac{4}{3}$$

Andererseits gilt:

$$\sqrt{9\cdot 16}=\sqrt{144}=12$$

$$\sqrt{16}:\sqrt{9}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$$

Daraus folgt:

$$\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}=\sqrt{9\cdot 16}=12$$

$$\sqrt{16}:\sqrt{9}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$$

Multiplikation von Wurzeln

Gleichnamige Wurzeln multiplizieren

Es können Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten multipliziert werden. Es gibt dabei eine Einschränkung:

- Ist der Wurzelexponent gerade, darf die Multiplikation der Wurzelradikanten nicht negativ sein. $(a\cdot b\geq 0)$.

Merksatz

Allgemein gilt:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c}$$

mit $a\cdot b\cdot c\geq 0$ und n gerade.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=-\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c}$$

mit $a\cdot b\cdot c<0$ und n ungerade.

Bei einem Produkt ist es möglich, die Wurzel gliedweise zu ziehen.

Bei der Multiplikation von Wurzeln gilt das Kommutativgesetz $a\cdot b=b\cdot a$ sowie das Assoziativgesetz $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

Beispiele: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3\cdot 3}=\sqrt{9}=3$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}=\sqrt{32}=4\cdot\sqrt{2}$

$\sqrt[4]{x}\cdot 2\cdot\sqrt[4]{x}=2\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x}=2\cdot\sqrt[4]{x\cdot x}=2\cdot\sqrt[4]{x^2}$

$a\cdot\sqrt[3]{y}\cdot b\cdot\sqrt[3]{y}\cdot c=a\cdot b\cdot c\cdot\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt[3]{y}=a\cdot b\cdot c\cdot\sqrt[3]{y\cdot y}=a\cdot b\cdot c\cdot\sqrt[3]{y^2}$

Ungleichnamige Wurzeln multiplizieren

Wurzeln mit ungleichen Wurzelexponenten müssen vor ihrer Multiplikation durch geeignete Umformung auf den gleichen Wurzelexponenten gebracht werden, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel: $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{6}$

Bestimmung des kgV der Wurzelexponenten.

Der kgV von 3 und 4 ist 12.

Erweiterung der Wurzelexponenten auf den kgV:

$\sqrt[3\cdot 4]{5^4}=\sqrt[12]{625};\quad\sqrt[4\cdot 3]{6^3}=\sqrt[12]{216}$

Wurzeln multiplizieren

$\sqrt[12]{625}\cdot\sqrt[12]{216}=\sqrt[12]{135000}$

Ist der Wurzelexponent gerade, darf die Multiplikation der Wurzelradikanten nicht negativ sein. $(a\cdot b\geq 0)$.

Merksatz

Allgemein gilt: $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[m\cdot n]{a^n}\cdot\sqrt[n\cdot m]{b^m}=\sqrt[m\cdot n]{a^n\cdot b^m}$

mit $a\cdot b\geq 0$ und $m\cdot n$ gerade.

$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=-\sqrt[m\cdot n]{a^n\cdot b^m}$

mit $a\cdot b<0$ und $m\cdot n$ ungerade.

Bei einem Produkt ist es möglich, die Wurzel gliedweise zu ziehen.

Beispiele: $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[4\cdot 3]{2^3}\cdot\sqrt[3\cdot 4]{3^4}=\sqrt[12]{8}\cdot\sqrt[12]{27}=\sqrt[12]{216}$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[3\cdot 4]{2^{12}}\cdot\sqrt[3\cdot 4]{2^4}\cdot\sqrt[4\cdot 3]{2^3}=\sqrt[12]{4096}\cdot\sqrt[12]{16}\cdot\sqrt[12]{8}=\sqrt[12]{524288}\cdot$

$\sqrt[5]{x}\cdot 2\cdot\sqrt{x}=2\cdot\sqrt[5\cdot 2]{x^2}\cdot\sqrt[2\cdot 5]{x^5}=2\cdot\sqrt[10]{x^2}\cdot\sqrt[10]{x^5}=2\cdot\sqrt[10]{x^2\cdot x^5}=\sqrt[10]{x^7}$

$a\cdot\sqrt{y}\cdot b\cdot\sqrt[3]{y}\cdot c\cdot\sqrt[4]{y}=a\cdot b\cdot c\cdot\sqrt[3\cdot 4]{y^{12}}\cdot\sqrt[3\cdot 4]{y^4}\cdot\sqrt[3\cdot 4]{y^3}=abc\sqrt[12]{y^{19}}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Division von Wurzeln

Gleichnamige Wurzeln dividieren

Es können nur Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten dividiert werden. Es gibt dabei eine Einschränkung:

- Ist der Wurzelexponent gerade, darf die Division der Wurzelradikanten nicht negativ sein. $(a:b \geq 0)$.

Merksatz

Allgemein gilt:

$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}:\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a:b:c}$
mit $a\cdot b\cdot c\geq 0\ \wedge b,c\neq 0$ und n gerade.

$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}:\sqrt[n]{c}=-\sqrt[n]{a:b:c}$
mit $a\cdot b\cdot c<0\ \wedge b;c\neq 0$ und n ungerade.

Bei einer Division ist es möglich, die Wurzel gliedweise zu ziehen.
Bei der Division von Wurzeln gilt das Kommutativgesetz sowie das Assoziativgesetz nicht.

Beispiele:

$\sqrt{3}:\sqrt{4}=\sqrt{3:4}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$

$\sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{4}:\sqrt{5}=\sqrt{2:3:4:5}=\sqrt{\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}}=\sqrt{\frac{2}{60}}=\sqrt{\frac{1}{30}}$

$\sqrt[4]{x}:2:\sqrt[4]{y}=\frac{\sqrt[4]{x}}{2\cdot\sqrt[4]{y}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$

$a\cdot\sqrt[3]{y}:\left(b\cdot\sqrt[3]{z^2}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{z^2}}=\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{y}{z^2}}$

Ungleichnamige Wurzeln dividieren

Wurzeln mit ungleichen Wurzelexponenten müssen vor ihrer Division durch geeignete Umformung auf den gleichen Wurzelexponenten gebracht werden, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel: $\sqrt[3]{5}:\sqrt[4]{6}$

Bestiummung des kgV der Wurzelexponenten.
Der kgV von 3 und 4 ist 12.
Erweiterung der Wurzelexponenten auf den kgV:

$\sqrt[3\cdot 4]{5^4}=\sqrt[12]{625};\quad\sqrt[4\cdot 3]{6^3}=\sqrt[12]{216}$

Wurzeln multiplizieren

$\sqrt[12]{625}:\sqrt[12]{216}=\sqrt[12]{\frac{625}{216}}$

Ist der Wurzelexponent gerade, darf die Multiplikation der Wurzelradikanten nicht negativ sein. $(a: b \geq 0)$.

Merksatz

Allgemein gilt:

$$\sqrt[m]{a}: \sqrt[n]{b} = \sqrt[m \cdot n]{a^n}: \sqrt[n \cdot m]{b^m} = \sqrt[m \cdot n]{\frac{a^n}{b^m}}$$

mit $a: b \geq 0;\ b \neq 0$ und $m \cdot n$ gerade.

$$\sqrt[m]{a}: \sqrt[n]{b} = -\sqrt[m \cdot n]{\frac{a^n}{b^m}}$$

mit $a: b < 0:\ b \neq 0$ und $m \cdot n$ ungerade.

Bei einer Division ist es möglich, die Wurzel gliedweise zu ziehen.

Beispiele:

$$\sqrt[4]{2}: \sqrt[3]{3} = \sqrt[4 \cdot 3]{2^3}: \sqrt[3 \cdot 4]{3^4} = \sqrt[12]{8}: \sqrt[12]{27} = \sqrt[12]{\frac{8}{27}}$$

$$\sqrt{2}: \sqrt[3]{2}: \sqrt[4]{2} = \sqrt[3 \cdot 4]{2^{12}}: \sqrt[3 \cdot 4]{2^4}: \sqrt[4 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[12]{4096}: \sqrt[12]{16}: \sqrt[12]{8} = \sqrt[12]{\frac{4096}{128}} = \sqrt[12]{32} \cdot$$

$$\sqrt[5]{x}: \left(2 \cdot \sqrt{x}\right) = \sqrt[5 \cdot 2]{x^2}: \left(2 \cdot \sqrt[2 \cdot 5]{x^5}\right) = \sqrt[10]{x^2}: \left(2 \cdot \sqrt[10]{x^5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[10]{\frac{x^2}{x^5}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[10]{\frac{1}{x^3}}$$

$$a \cdot \sqrt{y}: \left(b \cdot \sqrt[3]{y}\right): \left(c \cdot \sqrt[4]{y}\right) = \frac{a}{bc} \sqrt[3 \cdot 4]{y^{12}}: \sqrt[3 \cdot 4]{y^4}: \sqrt[4 \cdot 2]{y^3} = \frac{a}{bc} \sqrt[12]{\frac{y^{12}}{y^7}} = \frac{a}{bc} \cdot \sqrt[12]{y^5}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de